

## ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© Г.М. Куликов

Ключевые слова: многослойная оболочка; дискретно-структурная теория; тензор деформаций Грина – Лагранжа. Обсуждается дискретно-структурная теория многослойных оболочек, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам. В качестве искомым функций выбираются  $3(2N+1)$  перемещений лицевых и срединных поверхностей слоев, где  $N$  – число слоев в пакете. Такой выбор перемещений позволяет построить принципиально новые соотношения для тензора деформаций Грина – Лагранжа, точно представляющие произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в локальных криволинейных координатах отсчетной поверхности. Полученные деформационные соотношения могут служить основой для разработки геометрически точных элементов многослойной оболочки.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Принципы построения дискретно-структурной теории многослойных оболочек заложены в фундаментальной статье Э.И. Григолюка по трехслойным оболочкам конечного прогиба [1], где впервые сформулирована гипотеза ломаной нормали, позволившая методологически строить теорию трехслойных оболочек в духе однослойных. Геометрически нелинейная теория многослойных оболочек, в которой для описания механического поведения оболочки принимается гипотеза ломаной нормали Григолюка, позднее была разработана в работах [2–9]. При этом в [9] построены принципиально новые соотношения для тензора деформаций Грина-Лагранжа, точно представляющие произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных координатах отсчетной поверхности.

Как известно, метод конечных элементов на сегодняшний день стал наиболее мощным численным методом для решения задач механики оболочек. Вместе с тем проблема построения искривленных конечных элементов тонких оболочек, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам, ещё далека от решения. Причина кроется в неадекватном представлении деформационными соотношениями больших перемещений элемента оболочки как жесткого целого. Поэтому неудивительно, что в связи с отсутствием в литературе деформационных соотношений, способных в локальных криволинейных координатах представлять произвольное деформированное состояние элемента оболочки, в основном разрабатывалась концепция изопараметрического элемента, которая позволяла за счет существенного увеличения расчетного времени на компьютере представлять жесткие перемещения элемента как жесткого целого в глобальной декартовой системе координат [10, 11]. В этой связи отметим, что результаты [9] могут служить основой для разработки перспективных геометрически точных элементов оболочки. Термин «геометрически точный элемент» означает, что векторы перемещений

внешних поверхностей оболочки и поверхностей раздела слоев представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью.

В настоящей статье построены более общие деформационные соотношения дискретно-структурной теории многослойных оболочек, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам, с использованием обобщенной кинематической гипотезы Григолюка. В качестве искомым функций выбираются  $3(2N+1)$  перемещений лицевых и срединных поверхностей слоев, что позволяет учесть параболическое распределение перемещений по толщине слоев.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим оболочку, составленную из  $N$  слоев постоянной толщины  $h_k$ . В качестве отсчетной поверхности  $\Omega$  примем внутреннюю поверхность какого-либо  $k$ -го слоя или поверхность раздела слоев, которую отнесем к криволинейным координатам  $\theta^1, \theta^2$ . Поперечную координату  $\theta^3$  будем отсчитывать вдоль единичного вектора  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$  нормального к поверхности  $\Omega$  (рис. 1). Пусть  $\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2)$  – радиус-вектор точки отсчетной поверхности;  $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}$  – ковариантные базисные векторы отсчетной поверхности;  $\mathbf{a}^\beta$  – контравариантные базисные векторы, определяемые стандартным соотношением  $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta$ , где  $\delta_\alpha^\beta$  – символ Кронекера;  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$  и  $a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta$  – ковариантные и контравариантные компоненты первого метрического тензора отсчетной поверхности;  $a = \det[a_{\alpha\beta}]$  – дискриминант первого метрического тензора отсчетной поверхности;  $\mathbf{b}_\alpha^\beta = -\mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}$  –

смешанные компоненты второго метрического тензора отсчетной поверхности;  $z_{k-1}, z_{k-1/2}$  и  $z_k$  – поперечные координаты точек нижней  $\Omega_{k-1}$ , срединной  $\Omega_{k-1/2}$  и верхней  $\Omega_k$  поверхностей  $k$ -го слоя, при этом

$$h_k = z_k - z_{k-1}, \quad z_{k-1/2} = \frac{1}{2}(z_{k-1} + z_k); \quad (1)$$

$\mathbf{x}^{(k)}$  – радиус-вектор точки  $k$ -го слоя:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3, \quad z_{k-1} \leq \theta^3 \leq z_k; \quad (2)$$

$\mathbf{r}^{(I_k)}$  – радиус-векторы точек *определяющих* поверхностей  $\Omega_{I_k}$ :

$$\mathbf{r}^{(I_k)} = \mathbf{r} + z_{I_k} \mathbf{a}_3; \quad (3)$$

$\mathbf{g}_i^{(k)}$  – ковариантные базисные векторы  $k$ -го слоя:

$$\mathbf{g}_{\alpha}^{(k)} = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(k)} = \mu_{\alpha}^{(k)\beta} \mathbf{a}_{\beta}, \quad \mathbf{g}_3^{(k)} = \mathbf{x}_{,3}^{(k)} = \mathbf{a}_3, \quad (4)$$

$$\mu_{\alpha}^{(k)\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \theta^3 b_{\alpha}^{\beta}, \quad z_{k-1} \leq \theta^3 \leq z_k;$$

$\mathbf{a}_{\alpha}^{(I_k)}$  – ковариантные базисные векторы поверхностей  $\Omega_{I_k}$ :

$$\mathbf{a}_{\alpha}^{(I_k)} = \mathbf{r}_{,\alpha}^{(I_k)} = \eta_{\alpha}^{(I_k)\beta} \mathbf{a}_{\beta}, \quad \eta_{\alpha}^{(I_k)\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - z_{I_k} b_{\alpha}^{\beta}; \quad (5)$$

$g_{ij}^{(k)}$  – ковариантные компоненты пространственного метрического тензора  $k$ -го слоя:

$$g_{\alpha\beta}^{(k)} = \mathbf{g}_{\alpha}^{(k)} \cdot \mathbf{g}_{\beta}^{(k)} = \mu_{\alpha}^{(k)\gamma} \mu_{\beta}^{(k)\delta} a_{\gamma\delta},$$

$$g_{i3}^{(k)} = \mathbf{g}_i^{(k)} \cdot \mathbf{g}_3^{(k)} = \delta_{i3}; \quad (6)$$

$a_{\alpha\beta}^{(I_k)}$  – ковариантные компоненты метрических тензоров определяющих поверхностей  $\Omega_{I_k}$ :

$$a_{\alpha\beta}^{(I_k)} = \mathbf{a}_{\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_{\beta}^{(I_k)} = \eta_{\alpha}^{(I_k)\gamma} \eta_{\beta}^{(I_k)\delta} a_{\gamma\delta}; \quad (7)$$

$g^{(k)} = \det[g_{ij}^{(k)}]$  – дискриминант пространственного метрического тензора  $k$ -го слоя;  $a^{(I_k)} = \det[a_{\alpha\beta}^{(I_k)}]$  – дискриминанты метрических тензоров определяющих поверхностей  $\Omega_{I_k}$ , при этом  $g^{(k)}(z_{I_k}) = a^{(I_k)}$ ;  $(\dots)_{,i}$  – символ частного дифференцирования по координате  $\theta^i$ ;  $(\dots)_{|\alpha}$  – символ ковариантного дифференцирования на отсчетной поверхности  $\Omega$  по координате  $\theta^{\alpha}$ .

Здесь и далее тензорные греческие индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ ; тензорные латинские индексы  $i, j, m, n = 1, 2, 3$ ; индекс слоя  $k = 1, 2, \dots, N$ ; индексы нижней, срединной и верхней поверхностей  $k$ -го слоя  $I_k, J_k \in \{k-1, k-1/2, k\}$ ; индексы нижней и верхней поверхностей  $k$ -го слоя  $A_k, B_k \in \{k-1, k\}$ .

Будем полагать, что перемещения распределены по толщине  $k$ -го слоя согласно квадратичному закону, т. е.

$$\mathbf{u}^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} \mathbf{v}^{(I_k)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{v}^{(I_k)}(\theta^1, \theta^2)$  – векторы перемещений определяющих поверхностей  $\Omega_{I_k}$ ;  $L_{I_k}^{(k)}(\theta^3)$  – многочлены Лагранжа второй степени [12]:

$$L_{k-1}^{(k)} = \frac{2}{h_k^2} (z_{k-1/2} - \theta^3)(z_k - \theta^3),$$

$$L_{k-1/2}^{(k)} = \frac{4}{h_k^2} (\theta^3 - z_{k-1})(z_k - \theta^3), \quad (9)$$

$$L_k^{(k)} = \frac{2}{h_k^2} (\theta^3 - z_{k-1})(\theta^3 - z_{k-1/2})$$

такие, что  $L_{I_k}^{(k)}(z_{J_k}) = 1$  при  $J_k = I_k$  и  $L_{I_k}^{(k)}(z_{J_k}) = 0$  при  $J_k \neq I_k$ . Таким образом, здесь изучается  $3(2N+1)$ -параметрическая модель оболочки, т. к. рассматривается  $N+1$  лицевых и  $N$  срединных поверхностей слоев. Отметим, что кинематическая гипотеза (8), принятая для всего пакета слоев, была использована ранее для построения 9-параметрической модели оболочки в работах [12, 13].

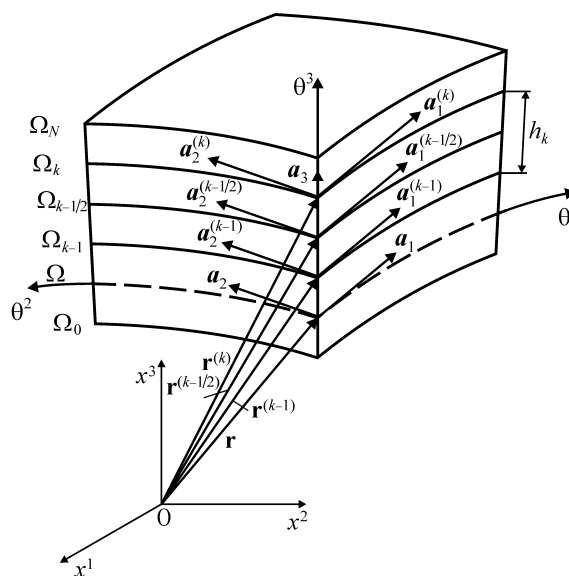


Рис. 1. Геометрия многослойной оболочки

С целью более компактной записи разрешающих уравнений дискретно-структурной теории соотношения (2)–(5) полезно переписать так:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} \mathbf{r}^{(I_k)}, \quad \mathbf{r}^{(k-1/2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^{(k-1)} + \mathbf{r}^{(k)}), \quad (10)$$

$$\mathbf{g}_\alpha^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} \mathbf{a}_\alpha^{(I_k)}, \quad \mathbf{a}_\alpha^{(k-1/2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha^{(k-1)} + \mathbf{a}_\alpha^{(k)}), \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_3^{(k)} = \sum_{A_k} N_{A_k}^{(k)} \mathbf{a}_3^{(A_k)}, \quad \mathbf{a}_3^{(A_k)} = \mathbf{a}_3,$$

где  $N_{A_k}^{(k)}(\theta^3)$  – многочлены Лагранжа первой степени:

$$N_{k-1}^{(k)} = \frac{1}{h_k} (z_k - \theta^3), \quad N_k^{(k)} = \frac{1}{h_k} (\theta^3 - z_{k-1}) \quad (12)$$

такие, что  $N_{A_k}^{(k)}(B_k) = 1$  при  $B_k = A_k$  и  $N_{A_k}^{(k)}(B_k) = 0$  при  $B_k \neq A_k$ .

Радиус-вектор точки  $k$ -го слоя оболочки в деформированном состоянии с учетом соотношений (8) – (10) представим в виде

$$\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} \bar{\mathbf{r}}^{(I_k)}, \quad z_{k-1} \leq \theta^3 \leq z_k, \quad (13)$$

где  $\bar{\mathbf{r}}^{(I_k)}(\theta^1, \theta^2)$  – радиус-векторы точек определяющих поверхностей  $k$ -го слоя оболочки в деформированном состоянии:

$$\bar{\mathbf{r}}^{(I_k)} = \mathbf{r}^{(I_k)} + \mathbf{v}^{(I_k)}. \quad (14)$$

Дифференцируя равенства (13), (14) и учитывая (11), приходим к формулам для базисных векторов  $k$ -го слоя оболочки в деформированном состоянии:

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} \bar{\mathbf{a}}_\alpha^{(I_k)}, \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}_{,3}^{(k)} = \sum_{A_k} N_{A_k}^{(k)} (\mathbf{a}_3^{(A_k)} + \boldsymbol{\beta}^{(k;A_k)}),$$

где  $\bar{\mathbf{a}}_\alpha^{(I_k)}(\theta^1, \theta^2)$  – базисные векторы определяющих поверхностей  $k$ -го слоя оболочки в деформированном состоянии;  $\boldsymbol{\beta}^{(k;A_k)}(\theta^1, \theta^2)$  – значения производной вектора перемещений  $k$ -го слоя по координате  $\theta^3$  на лицевых поверхностях  $\Omega_{A_k}$ :

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha^{(I_k)} = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha}^{(I_k)} = \mathbf{a}_\alpha^{(I_k)} + \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)}, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(k;k-1)} = \mathbf{u}_{,3}^{(k)}(z_{k-1}) = \frac{1}{h_k} (-3\mathbf{v}^{(k-1)} + 4\mathbf{v}^{(k-1/2)} - \mathbf{v}^{(k)}), \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(k;k)} = \mathbf{u}_{,3}^{(k)}(z_k) = \frac{1}{h_k} (\mathbf{v}^{(k-1)} - 4\mathbf{v}^{(k-1/2)} + 3\mathbf{v}^{(k)}).$$

### 3. ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Тензор деформаций Грина-Лагранжа  $k$ -го слоя оболочки имеет вид

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)} = \bar{\mathbf{g}}_i^{(k)} \cdot \bar{\mathbf{g}}_j^{(k)} - \mathbf{g}_i^{(k)} \cdot \mathbf{g}_j^{(k)}. \quad (18)$$

Вводя базисные векторы (11), (15) в пространственные деформационные соотношения (18), приходим к деформационным соотношениям  $3(2N+1)$ -параметрической дискретно-структурной модели многослойной оболочки

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{I_k, J_k} L_{I_k}^{(k)} L_{J_k}^{(k)} (\mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_\beta^{(J_k)} + \mathbf{v}_{,\beta}^{(J_k)} \cdot \mathbf{a}_\alpha^{(I_k)} + \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^{(J_k)}), \quad (19)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)} = \sum_{A_k, J_k} N_{A_k}^{(k)} L_{J_k}^{(k)} (\mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_3^{(A_k)} + \boldsymbol{\beta}^{(k;A_k)} \cdot \mathbf{a}_\alpha^{(I_k)} + \boldsymbol{\beta}^{(k;A_k)} \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)}),$$

$$2\varepsilon_{33}^{(k)} = \sum_{A_k, B_k} N_{A_k}^{(k)} N_{B_k}^{(k)} (\boldsymbol{\beta}^{(k;A_k)} \cdot \mathbf{a}_3^{(B_k)} + \boldsymbol{\beta}^{(k;B_k)} \cdot \mathbf{a}_3^{(A_k)} + \boldsymbol{\beta}^{(k;A_k)} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(k;B_k)}).$$

Как видим, тангенциальные  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ , поперечные касательные  $\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)}$  и поперечные нормальные  $\varepsilon_{33}^{(k)}$  компоненты тензора деформаций Грина-Лагранжа аппроксимируются по толщине  $k$ -го слоя с помощью многочленов четвертой, третьей и второй степеней, соответственно. Это является существенным препятствием для их использования в практических приложениях, поэтому более удобные деформационные соотношения рассматриваемой дискретно-структурной теории высокого порядка представим, учитывая кинематическую гипотезу (8), в следующем виде:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} e_{\alpha\beta}^{(I_k)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{i3}^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} e_{i3}^{(k;I_k)}. \quad (20)$$

Здесь  $e_{\alpha\beta}^{(I_k)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}(z_{I_k})$  и  $e_{i3}^{(k;I_k)} = \varepsilon_{i3}^{(k)}(z_{I_k})$  – точные значения тангенциальных и поперечных компонент тензора деформаций Грина-Лагранжа  $k$ -го слоя на определяющих поверхностях  $\Omega_{I_k}$ :

$$2e_{\alpha\beta}^{(I_k)} = \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_\beta^{(I_k)} + \mathbf{v}_{,\beta}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_\alpha^{(I_k)} + \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^{(I_k)}, \quad (21)$$

$$2e_{\alpha 3}^{(k;I_k)} = \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\beta}^{(k;I_k)} \cdot \mathbf{a}_\alpha^{(I_k)} + \boldsymbol{\beta}^{(k;I_k)} \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)},$$

$$2e_{33}^{(k;I_k)} = 2\boldsymbol{\beta}^{(k;I_k)} \cdot \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\beta}^{(k;I_k)} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(k;I_k)},$$

где

$$\beta^{(k;k-1/2)} = \mathbf{u}_{,3}^{(k)}(z_{k-1/2}) = \frac{1}{h_k}(-\mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{v}^{(k)}). \quad (22)$$

Замечание 1. Важно отметить, что компоненты точного  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  и приближенного  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$  тензоров деформаций Грина-Лагранжа удовлетворяют связующим условиям на определяющих поверхностях  $\Omega_{I_k}$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}(z_{I_k}) = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(k)}(z_{I_k}) = e_{\alpha\beta}^{(I_k)}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_{i3}^{(k)}(z_{I_k}) = \tilde{\varepsilon}_{i3}^{(k)}(z_{I_k}) = e_{i3}^{(k;I_k)}.$$

Геометрическая интерпретация условий (23) показана на рис. 2.

Представим далее векторы перемещений  $\mathbf{v}^{(I_k)}$  и производные векторов перемещений  $\beta^{(k;I_k)}$  в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью  $\Omega$ , т. е.

$$\mathbf{v}^{(I_k)} = v_i^{(I_k)} \mathbf{a}^i, \quad (24)$$

$$\beta^{(k;I_k)} = \beta_i^{(k;I_k)} \mathbf{a}^i, \quad (25)$$

где

$$\beta_i^{(k;k-1)} = \frac{1}{h_k}(-3v_i^{(k-1)} + 4v_i^{(k-1/2)} - v_i^{(k)}), \quad (26)$$

$$\beta_i^{(k;k-1/2)} = \frac{1}{h_k}(-v_i^{(k-1)} + v_i^{(k)}),$$

$$\beta_i^{(k;k)} = \frac{1}{h_k}(v_i^{(k-1)} - 4v_i^{(k-1/2)} + 3v_i^{(k)}).$$

Производные векторов перемещений  $k$ -го слоя по координате  $\theta^\alpha$  находим согласно формулам [12]:

$$\mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)} = v_i^{(I_k)} |_\alpha \mathbf{a}^i, \quad (27)$$

$$v_i^{(I_k)} |_\alpha = v_{i,\alpha}^{(I_k)} - \Gamma_{i\alpha}^j v_j^{(I_k)}, \quad (28)$$

где  $\Gamma_{i\alpha}^j$  – символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}, \quad \Gamma_{3\alpha}^\beta = -b_\alpha^\beta, \quad \Gamma_{3\alpha}^3 = 0. \quad (29)$$

Вводя формулы (5), (25), (27) в деформационные соотношения (21), приходим к скалярной форме этих соотношений

$$2e_{\alpha\beta}^{(I_k)} = \eta_\beta^{(I_k)\gamma} v_\gamma^{(I_k)} |_\alpha + \eta_\alpha^{(I_k)\gamma} v_\gamma^{(I_k)} |_\beta + a^{ij} v_i^{(I_k)} v_j^{(I_k)}, \quad (30)$$

$$2e_{\alpha 3}^{(k;I_k)} = v_{3,\alpha}^{(I_k)} |_\alpha + \eta_\alpha^{(I_k)\gamma} \beta_\gamma^{(k;I_k)} + a^{ij} \beta_i^{(k;I_k)} v_j^{(I_k)} |_\alpha,$$

$$2e_{33}^{(k;I_k)} = 2\beta_3^{(k;I_k)} + a^{ij} \beta_i^{(k;I_k)} \beta_j^{(k;I_k)},$$

где принято удобное обозначение  $a^{i3} = \delta^{i3}$ .

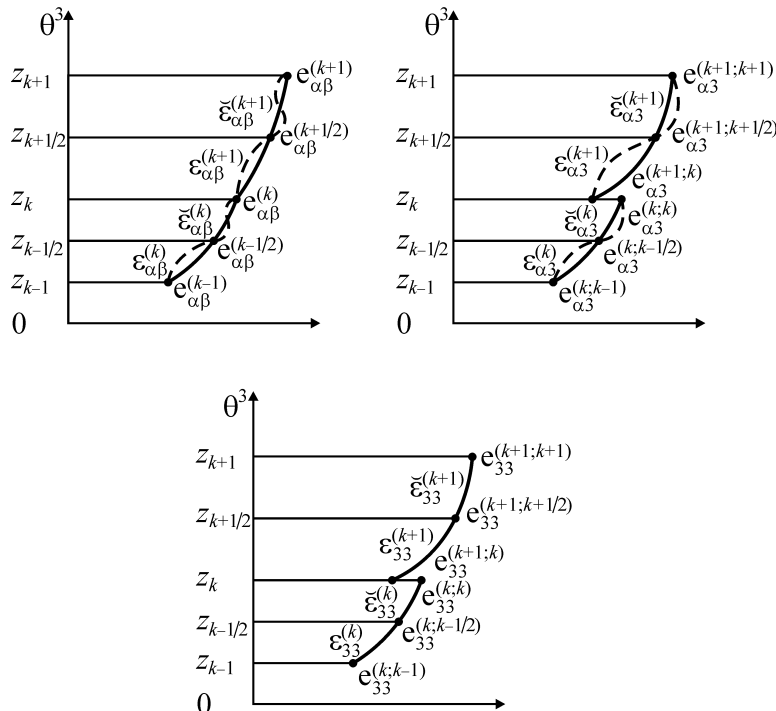
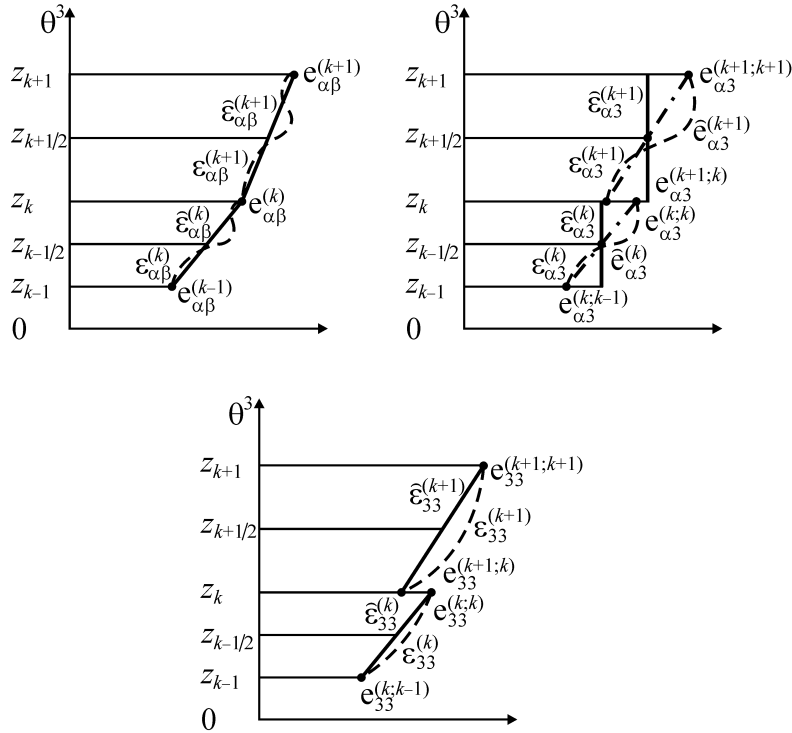


Рис. 2. Распределение точных деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k+1)}$  (---) и приближенных деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k+1)}$  (—) по толщинам  $k$ -го и  $k+1$ -го слоев в  $6N+3$ -параметрической модели многослойной оболочки



**Рис. 3.** Распределение точных деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k+1)}$  (---) и приближенных деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k+1)}$  (—) по толщинам  $k$ -го и  $k+1$ -го слоев в  $4N+3$ -параметрической модели многослойной оболочки

Деформационные соотношения  $6N+3$ -параметрической дискретно-структурной модели оболочки (20), (30) можно упростить, рассматривая  $4N+3$ -параметрическую дискретно-структурную модель первого порядка. В этой модели предполагается, что тангенциальные перемещения распределены по толщине  $k$ -го слоя согласно линейному закону, в то время как распределение поперечных перемещений остается неизменным:

$$u_{\alpha}^{(k)} = \sum_{A_k} N_{A_k}^{(k)} v_{\alpha}^{(A_k)}, \quad u_3^{(k)} = \sum_{I_k} L_{I_k}^{(k)} v_3^{(I_k)}. \quad (31)$$

Таким образом, в качестве искомых функций принимаются  $3(N+1)$  тангенциальных и поперечных перемещений лицевых поверхностей слоев и дополнительно  $N$  поперечных перемещений срединных поверхностей слоев. Предполагается также, что тангенциальные и поперечные нормальные деформации распределены в пределах слоя по линейному закону, а поперечные касательные деформации являются постоянными, т. е. имеем

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{A_k} N_{A_k}^{(k)} e_{\alpha\beta}^{(A_k)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^{(k)} = \sum_{A_k} N_{A_k}^{(k)} e_{33}^{(k;A_k)}, \quad (32)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^{(k)} = \tilde{e}_{\alpha 3}^{(k)}, \quad \tilde{e}_{\alpha 3}^{(k)} = \frac{1}{2} (e_{\alpha 3}^{(k;k-1)} + e_{\alpha 3}^{(k;k)}).$$

**Замечание 2.** Компоненты точного  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  и приближенного  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$  тензоров деформаций Грина-Лагранжа удовлетворяют связующим условиям на лицевых поверхностях  $k$ -го слоя  $\Omega_{A_k}$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}(z_{A_k}) = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(k)}(z_{A_k}) = e_{\alpha\beta}^{(A_k)}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{i3}^{(k)}(z_{A_k}) = \tilde{\varepsilon}_{i3}^{(k)}(z_{A_k}) = e_{i3}^{(k;A_k)}.$$

Отметим, что более общие условия представлены формулами (23), и геометрическая иллюстрация условий (33) показана на рис. 3.

#### 4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБОЛОЧКИ КАК ЖЕСТКОГО ЦЕЛОГО

Деформационные соотношения (20), (30) являются весьма привлекательными с точки зрения их использования в методе конечного элемента, поскольку они точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейной системе координат, связанной с отсчетной поверхностью  $\Omega$ . Действительно, перемещения  $k$ -го слоя оболочки как жесткого тела можно представить в векторной форме так:

$$\left(\mathbf{u}^{(k)}\right)^{\text{Rigid}} = \mathbf{\Lambda} + (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{x}^{(k)}, \quad z_{k-1} \leq \theta^3 \leq z_k. \quad (34)$$

Здесь  $\mathbf{\Lambda} = \Delta_i \mathbf{a}^i$  – вектор поступательного перемещения оболочки;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;  $\mathbf{\Phi}$  – ортогональная матрица вращений [14]:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\psi & \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\sin\psi & \sin\psi\cos\theta \\ \sin\psi\sin\theta + \cos\psi\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi\cos\theta + \cos\psi\sin\theta\sin\psi & \cos\psi\cos\theta \end{bmatrix}, \quad (35)$$

где  $\varphi, \theta, \psi$  – углы Эйлера – Крылова, характеризующие вращение оболочки как жесткого целого вокруг точки О (рис. 1). В частности, перемещения определяющих поверхностей  $\Omega_{I_k}$  можно записать в виде

$$\left(\mathbf{v}^{(I_k)}\right)^{\text{Rigid}} = \mathbf{\Lambda} + (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{r}^{(I_k)}. \quad (36)$$

Учитывая соотношения (10), (17), (22), (34), (36) и очевидные формулы для производных

$$\Delta_{,i} = \mathbf{0}, \quad \Phi_{,i} = \mathbf{0}, \quad (37)$$

приходим к выражениям для производных векторов перемещений:

$$\left(\mathbf{v}_{,\alpha}^{(I_k)}\right)^{\text{Rigid}} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{a}_{\alpha}^{(I_k)}, \quad (38)$$

$$\left(\mathbf{\beta}^{(k;k-1)}\right)^{\text{Rigid}} = \left(\mathbf{u}_{,3}^{(k)}(z_{k-1})\right)^{\text{Rigid}} = \quad (39)$$

$$= \frac{1}{h_k} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E}) \left( -3\mathbf{r}^{(k-1)} + 4\mathbf{r}^{(k-1/2)} - \mathbf{r}^{(k)} \right) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{a}_3,$$

$$\left(\mathbf{\beta}^{(k;k-1/2)}\right)^{\text{Rigid}} = \left(\mathbf{u}_{,3}^{(k)}(z_{k-1/2})\right)^{\text{Rigid}} =$$

$$= \frac{1}{h_k} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E}) \left( -\mathbf{r}^{(k-1)} + \mathbf{r}^{(k)} \right) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{a}_3,$$

$$\left(\mathbf{\beta}^{(k;k)}\right)^{\text{Rigid}} = \left(\mathbf{u}_{,3}^{(k)}(z_k)\right)^{\text{Rigid}} =$$

$$= \frac{1}{h_k} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E}) \left( \mathbf{r}^{(k-1)} - 4\mathbf{r}^{(k-1/2)} + 3\mathbf{r}^{(k)} \right) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{a}_3.$$

Если ввести формулы (38), (39) в деформационные соотношения (21), то после несложных преобразований получим

$$2\left(e_{\alpha\beta}^{(I_k)}\right)^{\text{Rigid}} = \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{a}_{\alpha}^{(I_k)}\right) \cdot \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{a}_{\beta}^{(I_k)}\right) - \mathbf{a}_{\alpha}^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_{\beta}^{(I_k)}, \quad (40)$$

$$2\left(e_{i3}^{(k;I_k)}\right)^{\text{Rigid}} = \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{a}_i^{(I_k)}\right) \cdot \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{a}_3\right) - \mathbf{a}_i^{(I_k)} \cdot \mathbf{a}_3.$$

Принимая во внимание, что ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение векторов, из (40) вытекает

$$\left(e_{\alpha\beta}^{(I_k)}\right)^{\text{Rigid}} = 0, \quad \left(e_{i3}^{(k;I_k)}\right)^{\text{Rigid}} = 0. \quad (41)$$

Равенства (41) означают, что все компоненты тензора деформаций Грина – Лагранжа на лицевых и срединных поверхностях слоев (30) дают строгие нули для произвольных перемещений оболочки как жесткого тела. Таким образом показано, что деформационные соотношения (20) точно представляют большие перемещения оболочки как жесткого целого.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 1. С. 26-34.
2. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Нелинейные уравнения тонких упругих оболочек // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 68-80.
3. Либреску Л. Нелинейная теория упругих анизотропных многослойных оболочек // Избранные проблемы прикладной механики. М.: Наука, 1974. С. 453-466.
4. Epstein M., Glockner P.G. Nonlinear analysis of multilayered shells // Int. J. Solids and Structures. 1977. V. 13. № 11. P. 1081-1089.
5. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1077-1079.
6. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
7. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 33-42.
8. Kulikov G.M. Computational models for multilayered composite shells with application to tires // Tire Science and Technology. 1996. V. 24. № 1. P. 11-38.
9. Куликов Г.М. Деформационные соотношения, точно представляющие большие перемещения оболочки как жесткого тела // Изв. АН РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 130-140.
10. Голованов А.Н., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: КФТИ АН СССР, 1989. 269 с.
11. Bathe K.J. Finite Element Procedures. NJ: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
12. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom // Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2008. V. 28. № 1. P. 15-38.
13. Kulikov G.M., Carrera E. Finite deformation higher-order shell models and rigid-body motions // Int. J. Solids and Structures. 2008. V. 45. № 11-12. P. 3153-3172.
14. Ишунский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00373) и Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/660).

Поступила в редакцию 25 марта 2009 г.

Kulikov G.M. Strain-displacement relationships of higher-order discrete-layer shell theory. A discrete-layer theory of shells subjected to large displacements and arbitrarily large rotations is discussed. As unknown functions  $3(2N+1)$  displacements of outer and middle surfaces of layers are chosen, where  $N$  is the number of layers. Such choice of displacements permits to develop the principally new equations for the Green – Lagrange strain tensor, exactly representing arbitrarily large rigid-body shell displacements in local curvilinear coordinates of the reference surface. The derived strain-displacement relationships can be taken as a basis for development of the geometrically exact multilayered shell elements.

Key words: multilayered shell; discrete-layer theory; Green – Lagrange strain tensor.