

УДК 539.3

ПУТИ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ УПРУГИХ  
МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК\*

Э.И. Григолюк<sup>1</sup>, Г.М. Куликов<sup>2</sup>

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова (1);  
кафедра «Прикладная математика и механика», ТГТУ (2)*

**Ключевые слова и фразы:** кинематические и статические гипотезы; многослойные пластина и оболочка; упругость.

**Аннотация:** Дан анализ работ, посвященных разработке перспективных моделей деформирования упругих многослойных пластин и оболочек. Особое внимание уделено построению непротиворечивых моделей, в которых не нарушаются условия непрерывности перемещений и поперечных напряжений на поверхностях раздела слоев, а также удовлетворяются заданные статические или кинематические граничные условия на лицевых поверхностях.

---

*Армения! Твой древний голос –  
Как нежный ветер в летний зной:  
Как бодро он взвывает волос,  
И, как дождем омытый колос,  
Я выпрямляюсь под грозой!*

*В.Я. Брюсов. К Армении, 1915*

## 1 К построению непротиворечивой теории многослойных пластин

Анализ работ, посвященных разработке различных моделей деформирования упругих многослойных пластин и оболочек, дан в известных обзорах [1–6]. Он показывает, что большие усилия ученых были сосредоточены на построении внутренне непротиворечивых моделей, в которых, во-первых, не нарушались бы условия непрерывности перемещений и поперечных напряжений на поверхностях раздела слоев; во-вторых, удовлетворялись бы заданные граничные условия (статические или кинематические) на лицевых поверхностях оболочки; и, наконец, уравнения обобщенного закона Гука удовлетворялись бы поточечно в пределах каждого слоя. Несмотря на гигантское количество работ, опубликованных как у нас в стране, так и за рубежом, таких непротиворечивых моделей построено не было.

Здесь на примере многослойной пластины наметим пути построения теории упругих многослойных оболочек, удовлетворяющей следующим трем требованиям: все компоненты вектора перемещений и поперечные компоненты тензора напряжений являются непрерывными функциями поперечной координаты всюду в теле оболочки, в том числе и на поверхностях раздела слоев; на лицевых поверх-

---

\* Посвящается 70-летию со дня рождения академика РАН С.С. Григоряна.

ностях оболочки выполняются заданные граничные условия для перемещений или поперечных напряжений. Должны также выполняться все уравнения обобщенного закона Гука не в интегральном смысле, как, например, в теории оболочек типа Тимошенко, а точно в пределах каждого слоя. Разумеется деформирование оболочки осуществляется без взаимного проскальзывания слоев относительно друг друга. Теорию, удовлетворяющую всем перечисленным выше требованиям, будем называть внутренне непротиворечивой теорией многослойных оболочек.

Предположим, что перемещения и поперечные напряжения можно представить в виде рядов по степеням поперечной локальной координаты  $z_k$  (рис. 1). Удержав в рядах по три или четыре первых члена, получим

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_{i0}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k u_{i1}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k^2 u_{i2}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k^3 u_{i3}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2); \\ u_3^{(k)} &= u_{30}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k u_{31}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k^2 u_{32}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \sigma_{i3}^{(k)} &= \tau_{i0}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k \tau_{i1}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k^2 \tau_{i2}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \tau_{30}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k \tau_{31}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k^2 \tau_{32}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta_k^3 \tau_{33}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\zeta_k = 2z_k/h_k$ ;  $-h_k/2 \leq z_k \leq h_k/2$ ;  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя;  $N$  – число слоев в пакете;  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $i = 1, 2$ .

Отметим, что использование более сложных аппроксимаций из [3] с удержанием во всех разложениях (1) по четыре первых члена широкого распространения не получило в связи со сложностью реализации этого подхода.

Из соотношений (1) и условий непрерывности на поверхностях раздела слоев

$$\begin{aligned} u_j^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, h_k/2) &= v_j^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2); & u_j^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, -h_k/2) &= v_j^{(k-1)}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \sigma_{j3}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, h_k/2) &= \tau_j^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2); & \sigma_{j3}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, -h_k/2) &= \tau_j^{(k-1)}(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

следуют более удобные формулы

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= \left( v_i^{(k)} + v_i^{(k-1)} \right) / 2 + \zeta_k \left( v_i^{(k)} - v_i^{(k-1)} \right) / 2 + \left( \zeta_k^2 - 1 \right) u_{i2}^{(k)} + \left( \zeta_k^3 - \zeta_k \right) u_{i3}^{(k)}; \\ u_3^{(k)} &= \left( v_3^{(k)} + v_3^{(k-1)} \right) / 2 + \zeta_k \left( v_3^{(k)} - v_3^{(k-1)} \right) / 2 + \left( \zeta_k^2 - 1 \right) u_{32}^{(k)}; \\ \sigma_{i3}^{(k)} &= \left( \tau_i^{(k)} + \tau_i^{(k-1)} \right) / 2 + \zeta_k \left( \tau_i^{(k)} - \tau_i^{(k-1)} \right) / 2 + \left( \zeta_k^2 - 1 \right) \tau_{i2}^{(k)}; \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \left( \tau_3^{(k)} + \tau_3^{(k-1)} \right) / 2 + \zeta_k \left( \tau_3^{(k)} - \tau_3^{(k-1)} \right) / 2 + \left( \zeta_k^2 - 1 \right) \tau_{32}^{(k)} + \left( \zeta_k^3 - \zeta_k \right) \tau_{33}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $v_j^{(n)}, \tau_j^{(n)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ;  $n = 0, 1, \dots, N$ ) – перемещения и поперечные напряжения лицевых поверхностей слоев (см. рис. 1).

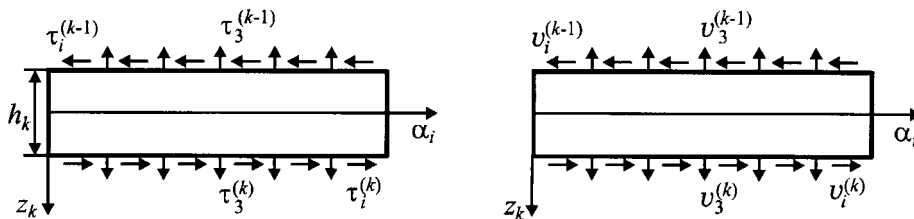


Рис. 1

Чтобы исключить оставшиеся функции  $u_{i2}^{(k)}, u_{i3}^{(k)}, u_{32}^{(k)}, \tau_{i2}^{(k)}, \tau_{32}^{(k)}, \tau_{33}^{(k)}$  воспользуемся законом Гука, который для упругой многослойной трансверсально изотропной пластины можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(k)} &= G'_k \varepsilon_{i3}^{(k)}; \quad \sigma_{33}^{(k)} = \lambda'_k \left( \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)} \right) + \mu'_k \varepsilon_{33}^{(k)}; \\ \lambda'_k &= \frac{\nu'_k E_k}{1 - \nu_k - 2(\nu'_k)^2 E_k / E'_k}; \quad \mu'_k = \frac{(1 - \nu_k) E_k}{\nu'_k E_k} \lambda'_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $E_k, E'_k$  и  $\nu_k, \nu'_k$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона  $k$ -го слоя по направлениям, лежащим в плоскости изотропии  $\alpha_1 \alpha_2$  и перпендикулярным к ней;  $G'_k$  – модуль сдвига  $k$ -го слоя в плоскости перпендикулярной плоскости изотропии. Тангенциальные и поперечные деформации определяем по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}^{(k)} &= \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial \alpha_i}; \quad \varepsilon_{12}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_1}; \\ \varepsilon_{i3}^{(k)} &= \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial z_k} + \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \alpha_i}; \quad \varepsilon_{33}^{(k)} = \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial z_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вводя перемещения (2) в деформационные выражения (4) и пользуясь соотношениями упругости (3), приходим к искомым зависимостям:

$$\begin{aligned} u_{i2}^{(k)} &= \frac{h_k}{8} \left[ \frac{\tau_i^{(k)} - \tau_i^{(k-1)}}{G'_k} - \frac{\partial (v_3^{(k)} - v_3^{(k-1)})}{\partial \alpha_i} \right]; \\ u_{i3}^{(k)} &= \frac{h_k}{8} \left[ \frac{\tau_i^{(k)} + \tau_i^{(k-1)}}{G'_k} - 2 \frac{v_i^{(k)} - v_i^{(k-1)}}{h_k} - \frac{\partial (v_3^{(k)} + v_3^{(k-1)})}{\partial \alpha_i} \right]; \\ u_{32}^{(k)} &= \frac{h_k}{8} \left\{ \frac{\tau_3^{(k)} - \tau_3^{(k-1)}}{\mu'_k} - \frac{\lambda'_k}{\mu'_k} \left[ \frac{\partial (v_1^{(k)} - v_1^{(k-1)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (v_2^{(k)} - v_2^{(k-1)})}{\partial \alpha_2} \right] \right\}; \quad (5) \\ \tau_{i2}^{(k)} &= G'_k \left( \frac{6}{h_k} u_{i3}^{(k)} + \frac{\partial u_{32}^{(k)}}{\partial \alpha_i} \right); \\ \tau_{32}^{(k)} &= \lambda'_k \left( \frac{\partial u_{12}^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_{22}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right), \quad \tau_{33}^{(k)} = \lambda'_k \left( \frac{\partial u_{13}^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_{23}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right); \\ v_3^{(k)} &= v_3^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k h_n \left\{ \frac{\tau_3^{(n)} + \tau_3^{(n-1)}}{\mu'_n} - \frac{\lambda'_n}{\mu'_n} \left[ \frac{\partial (v_1^{(n)} + v_1^{(n-1)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (v_2^{(n)} + v_2^{(n-1)})}{\partial \alpha_2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если на внешних поверхностях  $z_1 = -h_1/2$ ,  $z_N = h_N/2$  заданы поверхностные нагрузки, то в этом случае функции  $\tau_j^{(0)}$ ,  $\tau_j^{(N)}$  считаются известными. Таким образом, из  $21N$  функций, введенных в соотношениях (1), независимыми согласно формулам (2), (5) будут только  $5N$  функций:  $v_i^{(0)}$ ,  $v_i^{(1)}$ , ...,  $v_i^{(N)}$ ,  $v_3^{(0)}$ ,  $\tau_j^{(1)}$ ,  $\tau_j^{(2)}$ , ...,  $\tau_j^{(N-1)}$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3$ ).

Как видим, аппроксимация перемещений и поперечных напряжений в многослойной трансверсально изотропной пластине с помощью выражений (2), (5) удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям и может быть принята за основу при построении внутренне непротиворечивых моделей многослойных анизотропных оболочек.

## 2 Статические гипотезы в теории многослойных оболочек

Обсудим более простые пути построения теории многослойных оболочек. Рассмотрим оболочку постоянной толщины  $h$ , собранную из  $N$  слоев также постоянной толщины  $h_k$ . В качестве отсчетной поверхности выберем внутреннюю граничную поверхность  $S_0$ , которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha_1, \alpha_2$ , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату  $z$  будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности приведения (рис. 2).

Учитывая сложный характер распределения поперечных касательных напряжений по толщине  $k$ -го слоя (см. формулу (2)), примем

$$\sigma_{i3}^{(k)} = f_0(z)\mu_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) + f_k(z)\mu_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) + p_i^- + z(p_i^+ - p_i^-)/h. \quad (6)$$

Здесь  $f_0(z)$ ,  $f_k(z)$  – априори заданные функции, непрерывные и удовлетворяющие условиям  $f_0(0) = f_0(h) = 0$ ,  $f_k(z) = 0$ ,  $z \in [0, \delta_{k-1}] \cup [\delta_k, h]$ ;  $p_i^- = \sigma_{i3}^{(1)}(0)$ ,  $p_i^+ = \sigma_{i3}^{(N)}(h)$  – касательные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях оболочки  $S_0$  и  $S_N$ ;  $\delta_k$  – расстояние от поверхности  $S_0$  до верхней граничной поверхности  $k$ -го слоя  $S_k$ ;  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $i = 1, 2$ .

Гипотеза (6) имеет достаточно общий характер, поскольку из нее следуют известные гипотезы теории многослойных оболочек. Так, положив  $f_k(z) = 0$ , получим закон распределения поперечных касательных напряжений [7, 8]. Если рассмотреть трехслойную оболочку ( $N = 3$ ) и принять  $f_0(z) = f_1(z) = f_3(z) = 0$ ,  $p_i^+ = p_i^- = 0$ , то гипотеза (6) переходит в гипотезу, используемую в теории трехслойных оболочек [9]. При этом напряжения  $\sigma_{i3}^{(1)}$  и  $\sigma_{i3}^{(3)}$  нельзя считать равными нулю; они, строго говоря, не определены в несущих слоях

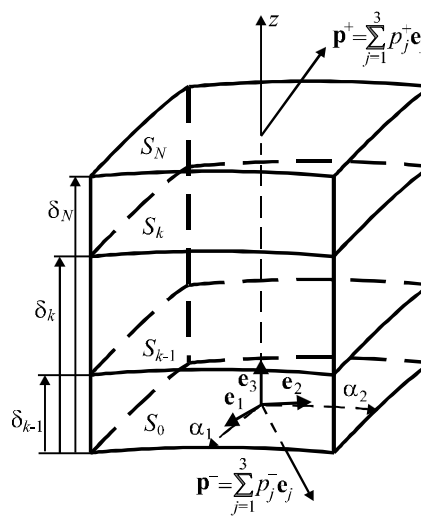


Рис. 2

оболочки. Формально положив  $f_0(z)=0$ ,  $f_k(z)=1$ ,  $p_i^+ = p_i^- = 0$ , приходим к равномерному распределению поперечных касательных напряжений по толщине  $k$ -го слоя, что также согласуется с допущениями [10]. По мере необходимости можно уточнить напряженно-деформированное состояние лишь одного, например,  $\ell$ -го слоя, наиболее слабого с точки зрения сопротивляемости поперечным сдвигам. Для этого следует принять  $f_n(z)=0$  ( $n=1, \dots, \ell-1, \ell+1, \dots, N$ ).

С помощью матрицы-строки  $\mathbf{M} = (m_0 m_1 \dots m_N)$ , компоненты которой принимают значения 0 или 1 и выполняют роль счетчиков функций  $f_n(z)$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ), тождественно не равных нулю, можно описать все возможные предельные случаи:

1) при  $m_n = 0$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ) считается справедливой гипотеза Кирхгофа, принятая для всего пакета слоев;

2) при  $m_0 = 1, m_k = 0$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) получим закон распределения поперечных касательных напряжений [7, 8]:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = f_0(z)\mu_i^{(0)} + p_i^- + z(p_i^+ - p_i^-)/h; \quad (7)$$

3) при  $m_0 = m_\ell = 1, m_n = 0$  ( $n=1, \dots, \ell-1, \ell+1, \dots, N$ ) уточняется напряженно-деформированное состояние одного отдельно взятого  $\ell$ -го слоя:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = f_0(z)\mu_i^{(0)} + \delta_{k\ell}f_\ell(z)\mu_i^{(\ell)} + p_i^- + z(p_i^+ - p_i^-)/h,$$

где  $\delta_{k\ell}$  – символ Кронекера;

4) при  $m_n = 1$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ) напряженно-деформированное состояние уточняется в каждом из  $N$  слоев, т.е. считается справедливой формула (6).

Отметим также гибкость и универсальность статической гипотезы (6), поскольку она позволяет описать неоднородное распределение поперечных касательных напряжений по толщине пакета (см. рис. 3, где для двухслойной оболочки, изготовленной из слоев различной жесткости, показан механизм "работы" гипотезы) и вместе с тем с помощью предельного перехода приводится к статической гипотезе (7), принятой для всего пакета. Из сказанного становится ясным, что предложенный подход объединяет два основных направления в теории многослойных оболочек [1], которые до настоящего времени развивались независимо и изолированно друг от друга.

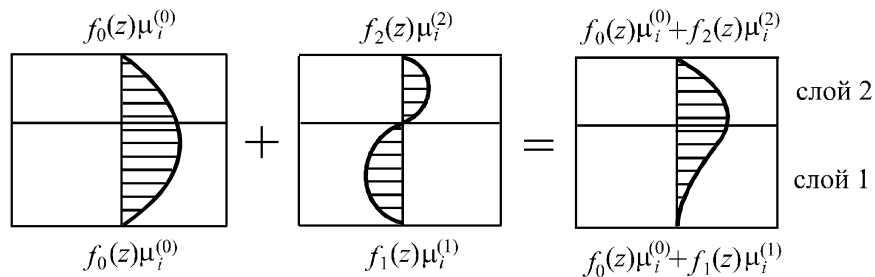


Рис. 3

### 3 Кинематические гипотезы в теории многослойных оболочек

Далее, для простоты изложения будем полагать, что материал каждого слоя оболочки несжимаем в поперечном направлении, т.е.  $u_3^{(k)} = w(\alpha_1, \alpha_2)$ . Для тангенциальных перемещений рассмотрим более сложные аппроксимации. Все они могут быть использованы при построении различных вариантов теории многослойных оболочек.

**Кинематическая гипотеза Тимошенко.** Тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета согласно линейному закону

$$u_i^{(k)} = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + z\beta_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (8)$$

На первый взгляд может показаться, что независимые аппроксимации поперечных касательных напряжений (6) и тангенциальных перемещений (8) вносят неустранимое противоречие в теорию оболочек, поскольку соотношения упругости для поперечных компонент напряжений и деформаций оказываются нарушенными. В действительности гипотеза (8) вносит лишь формальное противоречие в теорию оболочек типа Тимошенко, так как с помощью вариационного принципа Рейсснера [8] можно показать, что упомянутые соотношения упругости выполняются интегрально в пределах пакета и дополнительно в пределах каждого слоя. Последнее объясняется наличием в оболочечной системе дополнительных степеней свободы, отвечающих учету поперечных касательных напряжений, распределенных по толщине оболочки согласно уточненному закону (6).

**Обобщенная кинематическая гипотеза Тимошенко.** Если в качестве примера рассмотреть однослойную трансверсально изотропную оболочку ( $N = 1$ ), приняв в формуле (6)  $k = 1$ ,  $f_1(z) = 0$ ,  $p_i^+ = p_i^- = 0$ , и воспользоваться законом Гука (3), то выражение для поперечных сдвигов можно представить в виде

$$\varepsilon_{i3}^{(1)} = f_0(z)\mu_i^{(0)}/G_1'.$$

Сравнивая полученную формулу с известной формулой [8]

$$\varepsilon_{i3}^{(1)} = \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{1+k_i z} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i^{(1)} \right),$$

интегрируя по поперечной координате  $z$  и пренебрегая членами  $k_i z$  по сравнению с единицей, приходим к выражению для тангенциальных перемещений

$$u_i^{(1)} = u_i + z\theta_i + g(z)\mu_i^{(0)}/G_1'; \quad (9)$$

$$g(z) = \int_0^z f_0(y) dy; \quad \theta_i = k_i u_i - \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i},$$

где  $A_i$  – параметры Ламе;  $k_i$  – кривизны координатных линий;  $u_i$ ,  $w$  – тангенциальные и нормальное перемещения точек поверхности приведения.

Таким образом, аппроксимации поперечных касательных напряжений (6) при  $k = 1$ ,  $f_1(z) = 0$ ,  $p_i^+ = p_i^- = 0$  и тангенциальных перемещений (9) уже не являются независимыми. Они согласованы друг с другом посредством закона Гука. Этот

результат приводит к мысли использовать аппроксимацию (9) в качестве независимой от (6) при расчете многослойных оболочек, т.е. можно принять

$$u_i^{(k)} = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + z\theta_i(\alpha_1, \alpha_2) + g(z)\psi_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (10)$$

Кинематическую гипотезу (10) будем называть обобщенной гипотезой Тимошенко. Она позволяет, в отличие от кинематической гипотезы Тимошенко (8), описать нелинейную зависимость тангенциальных перемещений от поперечной координаты  $z$ .

**Гипотеза ломаной линии.** Принципы построения теории многослойных оболочек с учетом локальных эффектов заложены в фундаментальной работе [11] по трехслойным оболочкам, где впервые была сформулирована гипотеза ломаной линии (так называемая в зарубежной литературе zig-zag гипотеза [5, 6]). Позднее теория многослойных оболочек, в которой для каждого слоя принимается кинематическая гипотеза Тимошенко (кинематическая гипотеза ломаной линии для оболочки) была разработана в работах [8, 10, 12, 13].

Согласно [10] материал каждого слоя оболочки несжимаем в поперечном направлении и тангенциальные перемещения  $k$ -го слоя линейны относительно поперечной координаты  $z$ , т.е.

$$u_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}(\alpha_1, \alpha_2) + (z - \delta_{k-1})\beta_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (11)$$

где  $v_i^{(k-1)}$  – тангенциальные перемещения точек "нижней" лицевой поверхности

$k$ -го слоя;  $\beta_i^{(k)}$  – приращения тангенциальных перемещений в пределах  $k$ -го слоя.

Из условий непрерывности  $u_i^{(k)}(\delta_{k-1}) = u_i^{(k-1)}(\delta_{k-1})$  и соотношений (11) следует формула

$$u_i^{(k)} = u_i + \sum_{n=1}^{k-1} h_n \beta_i^{(n)} + (z - \delta_{k-1})\beta_i^{(k)}, \quad (12)$$

естественным образом обобщающая кинематическую гипотезу Тимошенко (8), при этом  $u_i = v_i^{(0)}$ . Отметим, что кинематическая гипотеза (12) с помощью про-

стого предельного перехода  $\beta_i^{(k)} = \beta_i$  с учетом равенства  $\delta_k = \sum_{n=1}^k h_n$  переходит в

кинематическую гипотезу Тимошенко.

**Обобщенная гипотеза ломаной линии.** Вдали от линий искажения напряженно-деформированного состояния гипотеза ломаной линии достаточно точно определяет локальное распределение тангенциальных перемещений. Вместе с тем линейная зависимость тангенциальных перемещений от поперечной координаты в пределах  $k$ -го слоя, как это следует из соотношений (2), ограничивает применение гипотезы при решении задач с высоким показателем изменчивости напряженного состояния. В связи с этим в работах [13, 14] была предложена обобщенная гипотеза ломаной линии, учитывающая нелинейный характер распределения тангенциальных перемещений по толщине  $k$ -го слоя

$$u_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}(\alpha_1, \alpha_2) + (z - \delta_{k-1})\theta_i(\alpha_1, \alpha_2) + [g(z) - g(\delta_{k-1})]\psi_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (13)$$

где  $g(z)$  – априори заданная функция поперечной координаты (9).

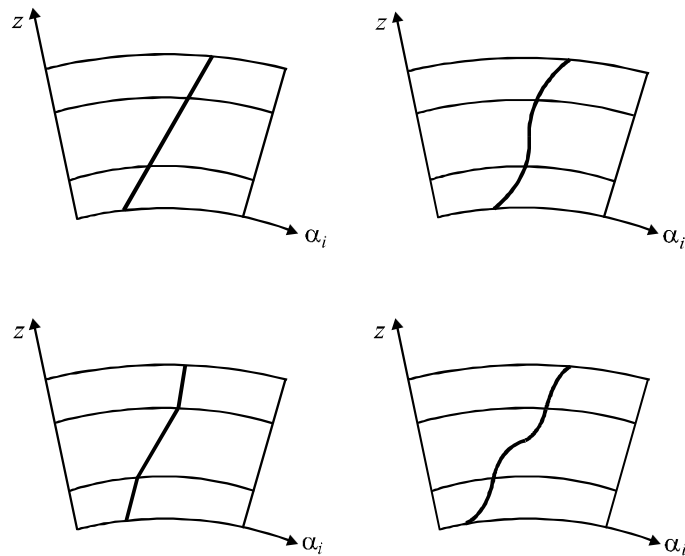


Рис. 4

Из условий непрерывности и формулы (13) получаем

$$u_i^{(k)} = u_i + z\theta_i + \sum_{n=1}^{k-1} (\zeta_n - \zeta_{n-1}) \psi_i^{(n)} + [g(z) - \zeta_{k-1}] \psi_i^{(k)}, \quad (14)$$

где  $\zeta_n = g(\delta_n)$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ). Обобщенная гипотеза ломаной линии (14) имеет достаточно общий характер, поскольку из нее вытекают рассмотренные выше кинематические гипотезы. Так, положив в (14)  $g(z) = z$ ,  $\psi_i^{(k)} = \beta_i^{(k)} - \theta_i$ , приходим к гипотезе ломаной линии (12). Если принять  $\psi_i^{(k)} = \psi_i$ , то получим обобщенную гипотезу Тимошенко (10). Дополнительно полагая  $\psi_i = 0$ , приходим к кинематической гипотезе Кирхгофа. Предельный переход от гипотезы ломаной линии к кинематической гипотезе Тимошенко указан выше.

Геометрическая иллюстрация обсужденных кинематических гипотез представлена на рис. 4.

#### Список литературы

- 1 Григолюк, Э.И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э.И. Григолюк, Е.А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 3–17.
- 2 Григолюк, Э.И. Статика упругих слоистых оболочек / Э.И. Григолюк, Е.А. Коган – М.: НИИ Механики МГУ, 1998. – 216 с.
- 3 Григолюк, Э.И. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 2. – С. 287–298.
- 4 Noor, A.K. Assessment of computational models for multilayered composite shells / A.K. Noor, W.S Burton // Applied Mechanics Reviews. – 1990. – Vol. 43, No. 4. – Pp. 67–97.
- 5 Carrera, E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells / E. Carrera // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 9. – Pp. 1–60.



6 Carrera, E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // *Applied Mechanics Reviews*. – 2003. – Vol. 56, No. 3. – Pp. 287–308.

7 Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

8 Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.

9 Григолюк, Э.И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: Машиностроение, 1973. – 170 с.

10 Григолюк, Э.И. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // *Изв. АН СССР. Механика*. – 1965. – № 5. – С. 68–80.

11 Григолюк, Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем / Э.И. Григолюк // *Изв. АН СССР. ОТН*. – 1958. – № 1. – С. 26–34.

12 Куликов, Г.М. Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов / Г.М. Куликов // *ПМТФ*. – 1988. – № 5. – С. 157–162.

13 Kulikov, G.M. Computational models for multilayered composite shells with application to tires / G.M. Kulikov // *Tire Science and Technology*. – 1996. – Vol. 24, No. 1. – Pp. 11–38.

14 Куликов, Г.М. Расчет пневматических шин на основе обобщенной гипотезы ломаной линии / Г.М. Куликов // *Проблемы прочности*. – 1990. – № 2. – С. 91–95.

---

## Development of the Theory of Elastic Multilayered Plates and Shells

E.I. Grigolyuk<sup>1</sup>, G.M. Kulikov<sup>2</sup>

*The Institute of Mechanics, MSU after M.V. Lomonosov (1);  
Department "Applied Mathematics and Mechanics", TSTU (2)*

**Key words and phrases:** elasticity; kinematic and static hypotheses; multilayered plate and shell.

**Abstract:** An analysis of works concerning the development of robust models for the elastic multilayered plates and shells is given. The particular attention is paid to the elaboration of non-contradictory models, in which continuity conditions for displacements and transverse stresses at the face surfaces of layers are fulfilled. Besides, the prescribed static and kinematic boundary conditions are also satisfied.

---

## Entwicklungswege der Theorie der elastischen vielschichtigen Platten und Umhüllungen

**Zusammenfassung:** Es ist die Analyse der der Erarbeitung von perspektiven Modellen der Deformierung der elastischen vielschichtigen Platten und Umhüllungen gewidmeten Werken angegeben. Die besondere Aufmerksamkeit ist dem Aufbau der widerspruchsfreien Modelle geschenkt, wo die Bedingungen der Bewegungskontinuität und der Querspannungen auf den Oberflächen der Schechtenteilung nicht gebrochen werden und auch die statischen und kinematischen Sollgrenzbedingungen auf den Schaufflächen erfüllt werden.

## **Voies du développement de la théorie des plaques multicouches et des enveloppes**

**Résumé:** Est donnée l'analyse des ouvrages consacrés à l'élaboration des modèles perspectifs de la déformation des plaques multicouches élastiques et des enveloppes. L'attention particulière est prêtée à la construction des modèles non-contradictaires dans lesquels ne sont pas violées les conditions de la discontinuité des déplacements et des tensions transversales sur les surfaces de la division des couches ainsi que sont satisfaites les conditions de limite statiques ou cinétiques données sur les surfaces de face.

---