

# Zur inneren Mechanik des Radialreifens

## Teil 2. Geschichtete Kompositschale mit diskreten Verschiebungsansätzen für die einzelnen Schichten

G. M. Kulikov, F. Böhm, A. Duda, R. Wille, S. V. Plotnikova

*Diskutiert werden Theorie und numerischer Lösungsalgorithmus für Aufgaben der Statik geschichteter anisotroper Rotationsschalen mit Berücksichtigung lokaler Effekte. Als gesuchte Funktionen werden die Verschiebungen der Schalendeckflächen und der Trennschichten zwischen den Schichten gewählt, was bei Problemen der Mechanik von Luftreifen zweckmäßig ist. Untersucht wird die Berechnung eines unter Innendruck stehenden Reifens, der zusätzlich durch eine über einen kleinen Teil der Reifenaußenfläche verteilte örtliche Normalkraft belastet ist. Es wird gezeigt, daß der lokale Verlauf der normal zur Schalensfläche gerichteten Komponenten des Spannungstensors über die Dicke des Laminats in den Randzonen des Gürtels ganz wesentlich ist und richtig nur mit einer diskreten, d.h. die Schichten einzeln erfassenden, Theorie beschrieben werden kann.*

### 1 Einführung

Im Teil 1 des Artikels wurde das Problem der Berechnung der Spannungsfelder in einem Radialreifen mit Berücksichtigung der lokalen Spannungsverteilung über die Dicke des Schichtpakets nach einer Theorie geschichteter Kompositschalen vom Typ Timoshenko/Mindlin behandelt. Es wurde festgestellt, daß in verschiedenen Fällen das Problem nach diesem vereinfachten Modell korrekt gelöst werden kann. In der Zone der Gürtelränder bei Radialreifen mit wenigen Schichten ist jedoch die Verteilung der zur Schalensmittelfläche querverrichteten Spannungskomponenten  $\sigma_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) über die Schalendicke stark inhomogen. Es ist daher angebracht, zur Berücksichtigung dieser lokalen Effekte eine allgemeinere Theorie der geschichteten Schalen zu verwenden.

Das Prinzip der Theorie mehrschichtiger Schalen mit Berücksichtigung lokaler Effekte ist in der grundlegenden Arbeit von Grigolyuk (1958) über dreischichtige Schalen dargelegt, wo erstmalig die *Hypothese der gebrochenen Normalen* (zig-zag hypothesis) formuliert wurde, mit der die Theorie dreischichtiger Schalen ähnlich wie für einschichtige Schalen aufgestellt werden kann. Auf dieser Hypothese basiert auch die Habilitationsschrift von Duda (1976) über dreischichtige Platten und Schalen. Die Theorie mehrschichtiger Schalen mit Verwendung der Hypothese der gebrochenen Normalen wurde erstmalig in den Artikeln von Grigolyuk und Chulkov (1965, 1972) dargelegt und in den Arbeiten von Librescu (1975), Epstein und Glockner (1977), Grigolyuk und Kulikov (1984, 1987) weiterentwickelt. Die Vorgehensweise, u.a. auch bei Reifenschalen, wird ausführlich dargestellt in der Monografie von Grigolyuk und Kulikov (1988a) und in den Übersichtsartikeln Grigolyuk und Kulikov (1988b), Noor und Burton (1990), wo die Arbeiten bis zum Jahr 1990 diskutiert sind.

Seitdem entwickelte sich die Theorie mehrschichtiger Schalen mit Berücksichtigung lokaler Effekte ständig weiter und lieferte eine Reihe neuer origineller Ergebnisse: Di Sciuva (1993), Gruttmann und Wagner (1994), Kulikov (1994, 1996), Lee und Liu (1992), Lu und Liu (1992), Reddy u.a. (1989), Reddy und Savoia (1992), Reddy und Starnes (1993), Wisniewski und Schrefler (1993), Wu und Yen (1993). Bei der Anwendung dieser Theorie verlieren die in der Mechanik der Kompositkonstruktionen üblichen Begriffe wie „Tragschicht“ (steife Schicht) und „Kern“ (weiche Schicht) ihren Sinn. Alle Schichten sind gleichwertig, was von Vorteil für die Algorithmisierung des Problems ist.

Auch im Teil 2 des Artikels wird das Problem mit Hilfe des gemischten Variationsprinzips von Hu / Washizu gelöst, welches auf ein innerlich widerspruchsfreies mathematisches Modell der mehrschichtigen anisotropen Schale mit Berücksichtigung lokaler Effekte führt. Als gesuchte Funktionen werden die Verschiebungen der

Schalendeckflächen und der Trennflächen zwischen den Schichten eingeführt. Das erleichtert die Formulierung nichtlinearer statischer Probleme geschichteter Kompositschalen und gestattet die Entwicklung effektiver numerischer Algorithmen. Als zu bestimmende Funktionen werden Größen gewählt, mit deren Hilfe die kinematischen Bedingungen auf der äußeren Schalenoberfläche (z. B. die Bedingungen der Nichtdurchdringbarkeit kontaktierender Körper) zu formulieren sind.

Untersucht wird das nicht-axialsymmetrische Problem für die vorgespannte geschichtete Komposit-Rotationsschale bei beliebiger Orientierung der makroskopisch orthotropen Schichten (typisch für Radialreifen). Dieses Problem, das durch eine wesentliche Anisotropie der Schichten und die Inhomogenität des Spannungs-Deformations-Zustandes gekennzeichnet ist, gilt bis heute als nicht ausreichend erforscht. Der Spannungs-Deformations-Zustand dünnwandiger Kompositschalen, die aus wenigen Schichten bestehen, hat deutlich ausgeprägten räumlichen Charakter (Faria u.a., 1992; Grigolyuk und Kulikov, 1988a; Kulikov, 1996; Patel und Kennedy, 1982; Rothert und Gall, 1986). Als Beispiel wird die Berechnung des durch Innendruck vorbelasteten Radialreifens, der außerdem durch eine auf einer elliptischen Fläche normal verteilten Kontaktlast beansprucht ist, vorgestellt.

## 2 Grundgleichungen der dünnen anisotropen Mehrschichtschale

Wie im Teil 1 betrachten wir auch hier wieder eine vorgespannte dünne geschichtete Schale der Dicke  $h$ , die aus  $N$  linear-elastischen anisotropen Schichten der Dicke  $h_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) zusammengesetzt ist. Als Bezugsfläche  $S$  nehmen wir die Innenfläche irgendeiner  $k$ -ten Schicht oder eine Trennfläche an und beziehen diese auf die krummlinigen orthogonalen Koordinaten  $\alpha_1, \alpha_2$  längs der Hauptkrümmungslinien (Bild 1, Teil 1). Die quergerichtete Koordinate  $\alpha_3 = z$  zählt positiv in Richtung der äußeren Flächennormalen. Es seien:  $\delta_k$  - Abstand der oberen Begrenzungsfläche der  $k$ -ten Schicht von der Bezugsfläche;  $A_\alpha$  - Lamé'sche Parameter der Bezugsfläche;  $k_\alpha = 1/R_\alpha$  - Krümmungen der Koordinatenlinien;  $\sigma_{ij}^{0(k)}$  und  $\sigma_{ij}^{(k)}$  - Anfangsspannungen und Zusatzspannungen in der  $k$ -ten Schicht;  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  - Deformationen der  $k$ -ten Schicht;  $b_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)}$  und  $b_{\alpha 3 \gamma 3}^{(k)}$  - Tangential- und Querstetigkeiten der  $k$ -ten Schicht. Hier und im weiteren sind  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $\ell = 0, 1, \dots, N$ ;  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ .

Für die Aufstellung der diskreten Theorie mehrschichtiger anisotroper Schalen verwenden wir eine modifizierte kinematische Timoshenko-Hypothese der linearen Verteilung der Verschiebungen über die Dicke der  $k$ -ten Schicht (Kulikov, 1996):

$$u_\alpha^{(k)} = N_k^-(z)v_\alpha^{(k-1)} + N_k^+(z)v_\alpha^{(k)} \quad u_3^{(k)} = v_3 \quad (1)$$

$$N_k^-(z) = (\delta_k - z) / h_k \quad N_k^+(z) = (z - \delta_{k-1}) / h_k$$

wobei:  $v_\alpha^{(k-1)}, v_\alpha^{(k)}$  - Verschiebungen der inneren  $S_{k-1}$  und der äußeren  $S_k$  Oberfläche der  $k$ -ten Schicht;  $N_k^-(z), N_k^+(z)$  - lineare Formfunktionen der  $k$ -ten Schicht.

Für die Deformationen verwenden wir als unabhängige Approximation die Annahme einer linearen Verteilung der tangentialen Deformationen und der Schubdeformationen in Querrichtung über die Dicke der  $k$ -ten Schicht

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = N_k^-(z)E_{\alpha\beta}^{(k-1)} + N_k^+(z)E_{\alpha\beta}^{(k)} \quad \varepsilon_{33}^{(k)} = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)} = N_k^-(z)E_{\alpha 3}^{(k)-} + N_k^+(z)E_{\alpha 3}^{(k)+}$$

$E_{\alpha\beta}^{(\ell)}$  und  $E_{\alpha 3}^{(k)\pm}$  - tangentiale Deformationen und Querschubdeformationen der Schalenober- und -unterfläche und in den Trennflächen zwischen den Schichten. Die unabhängige Approximation für die quergerichteten Schubdeformationen  $\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)}$  bringt einen formalen Widerspruch in die Schalentheorie, der dadurch behoben wird, daß die entsprechenden Elastizitätsbeziehungen im Mittel über die Dicke der  $k$ -ten Schicht erfüllt sind; siehe im weiteren die Gleichungen (3) und (8).

Die lösenden Gleichungen der Theorie mehrschichtiger anisotroper Schalen können aus dem gemischten Prinzip von Hu / Washizu gewonnen werden, was eine natürliche Zurückführung des dreidimensionalen Problems der Elastizitätstheorie auf ein zweidimensionales Schalenproblem ermöglicht. Dazu führen wir die tangentialen und quergerichteten Spannungsergebnisse ein:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}^{(0)} &= H_{\alpha\beta}^{(1)-} & H_{\alpha\beta}^{(n)} &= H_{\alpha\beta}^{(n)+} + H_{\alpha\beta}^{(n+1)-} & H_{\alpha\beta}^{(N)} &= H_{\alpha\beta}^{(N)+} \\ H_{\alpha\beta}^{(k)\pm} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} N_k^{\pm}(z) dz & H_{\alpha 3}^{(k)\pm} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\alpha 3}^{(k)} N_k^{\pm}(z) dz \end{aligned} \quad (3)$$

Wir setzen die Formeln für die Verschiebungen (1) und Deformationen (2) in die gemischten Variationsgleichungen (1) aus Teil I ein und betrachten die Verschiebungen  $v_{\alpha}^{(\ell)}, v_3$ , die Deformationsgrößen  $E_{\alpha\beta}^{(\ell)}, E_{\alpha 3}^{(k)\pm}$  und die Spannungsergebnisse  $H_{\alpha\beta}^{(\ell)}, H_{\alpha 3}^{(k)\pm}$  als unabhängige Funktionalvariablen. Nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung der Näherungsformeln

$$\Theta_{\gamma}^{(k)} \Theta_{\delta}^{(k)} \approx N_k^{-}(z) \theta_{\gamma}^{(k-1)} \theta_{\delta}^{(k-1)} + N_k^{+}(z) \theta_{\gamma}^{(k)} \theta_{\delta}^{(k)} \quad \theta_{\gamma}^{(\ell)} = k_{\gamma} v_{\gamma}^{(\ell)} - \frac{1}{A_{\gamma}} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_{\gamma}} \quad (4)$$

erhalten wir die Ausgangsbeziehungen der Theorie mehrschichtiger anisotroper Schalen mit Berücksichtigung lokaler Effekte:

(a) Gleichungen der geometrisch nichtlinearen räumlichen Elastizitätstheorie für die k-te Schicht der Schale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{\gamma}} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{(k)}}{\partial \alpha_{\gamma}} + \frac{1}{A_{\delta}} \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}^{(k)}}{\partial \alpha_{\delta}} + \frac{\partial \sigma_{\gamma 3}^{(k)}}{\partial z} + \rho_{\gamma} (\sigma_{\gamma\gamma}^{(k)} - \sigma_{\delta\delta}^{(k)}) + 2\rho_{\delta} \sigma_{\gamma\delta}^{(k)} + k_{\gamma} \Sigma_{\gamma 3}^{(k)} &= 0 \quad (\gamma \neq \delta) \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Sigma_{13}^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Sigma_{23}^{(k)}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial z} + \rho_1 \Sigma_{13}^{(k)} + \rho_2 \Sigma_{23}^{(k)} - k_1 \sigma_{11}^{(k)} - k_2 \sigma_{22}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma 3}^{(k)} &= \sigma_{\gamma 3}^{(k)} + \Theta_1^{(k)} (\sigma_{1\gamma}^{0(k)} + \sigma_{1\gamma}^{(k)}) + \Theta_2^{(k)} (\sigma_{\gamma 2}^{0(k)} + \sigma_{\gamma 2}^{(k)}) \\ \Theta_{\gamma}^{(k)} &= -N_k^{-}(z) \theta_{\gamma}^{(k-1)} - N_k^{+}(z) \theta_{\gamma}^{(k)} \quad \rho_{\gamma} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_{\delta}}{\partial \alpha_{\gamma}} \quad (\gamma \neq \delta) \end{aligned} \quad (6)$$

(b) Deformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} E_{\gamma\gamma}^{(\ell)} &= \frac{1}{A_{\gamma}} \frac{\partial v_{\gamma}^{(\ell)}}{\partial \alpha_{\gamma}} + \rho_{\delta} v_{\delta}^{(\ell)} + k_{\gamma} v_3 + \frac{1}{2} (\theta_{\gamma}^{(\ell)})^2 \quad (\gamma \neq \delta) \\ E_{12}^{(\ell)} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_2^{(\ell)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_1^{(\ell)}}{\partial \alpha_2} - \rho_2 v_1^{(\ell)} - \rho_1 v_2^{(\ell)} + \theta_1^{(\ell)} \theta_2^{(\ell)} \\ E_{\gamma 3}^{(k)-} &= \beta_{\gamma}^{(k)} - \theta_{\gamma}^{(k-1)} \quad E_{\gamma 3}^{(k)+} = \beta_{\gamma}^{(k)} - \theta_{\gamma}^{(k)} \quad \beta_{\gamma}^{(k)} = \frac{1}{h_k} (v_{\gamma}^{(k)} - v_{\gamma}^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (7)$$

(c) Elastizitätsbeziehungen für die Spannungsergebnisse:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}^{(k)-} &= \sum_{\gamma \leq \delta} (A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)00} E_{\gamma\delta}^{(k-1)} + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)01} E_{\gamma\delta}^{(k)}) & H_{\alpha\beta}^{(k)+} &= \sum_{\gamma \leq \delta} (A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)01} E_{\gamma\delta}^{(k-1)} + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)11} E_{\gamma\delta}^{(k)}) \\ H_{\alpha 3}^{(k)-} &= \sum_{\gamma} (A_{\alpha 3\gamma 3}^{(k)00} E_{\gamma 3}^{(k)-} + A_{\alpha 3\gamma 3}^{(k)01} E_{\gamma 3}^{(k)+}) & H_{\alpha 3}^{(k)+} &= \sum_{\gamma} (A_{\alpha 3\gamma 3}^{(k)01} E_{\gamma 3}^{(k)-} + A_{\alpha 3\gamma 3}^{(k)11} E_{\gamma 3}^{(k)+}) \end{aligned} \quad (8)$$

wobei  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)pq}$  und  $A_{\alpha 3\gamma 3}^{(k)pq}$  die Tangential- und Quersteifigkeiten der k-ten Schicht sind:

$$A_{\alpha i \gamma j}^{(k)pq} = \frac{h_k b_{\alpha i \gamma j}^{(k)}}{3(1+|p-q|)} \quad (p, q = 0, 1)$$

(d) Randbedingungen an der Schalenaußenfläche  $S_N$ :

$$\sigma_{i3}^{(N)} = p_i^+ \quad (9)$$

(e) Randbedingungen an der Schaleninnenfläche  $S_0$ :

$$\sigma_{i3}^{(1)} = p_i^- \quad (10)$$

(f) Stetigkeitsbedingungen in den Schichttrennflächen  $S_n$ :

$$\sigma_{i3}^{(n)} = \sigma_{i3}^{(n+1)} \quad (11)$$

(g) natürliche Randbedingungen auf der Randkontur  $\Gamma \subset S$ :

$$\left( H_{vv}^{(\ell)} - \hat{H}_{vv}^{(\ell)} \right) \delta v_v^{(\ell)} = 0 \quad \left( H_{vt}^{(\ell)} - \hat{H}_{vt}^{(\ell)} \right) \delta v_t^{(\ell)} = 0 \quad \left( R_{v3} - \hat{T}_{v3} \right) \delta v_3 = 0 \quad (12)$$

wobei  $\hat{H}_{vv}^{(\ell)}$  und  $\hat{H}_{vt}^{(\ell)}$  - Resultierende der äußeren Flächenlasten  $q_v^{(k)}$  und  $q_t^{(k)}$  auf den Seitenflächen  $\Omega_k$  der k-ten Schicht in den Richtungen der Normalen  $v$  und der Tangenten  $t$  zur Randkontur  $\Gamma$  (aus der Formel (3) durch Ersatz von  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$  durch  $q_v^{(k)}$  bzw.  $q_t^{(k)}$ );  $\hat{T}_{v3}$  und  $R_{v3}$  - Resultierende der Oberflächenbelastungen und der verallgemeinerten Schubspannungen, vgl. Teil 1:

$$\hat{T}_{v3} = \sum_{k=l\delta_{k-1}}^N \delta_k \int q_3^{(k)} dz \quad R_{v3} = \sum_{k=l\delta_{k-1}}^N \delta_k \int \Sigma_{v3}^{(k)} dz \quad (13)$$

$$\Sigma_{v3}^{(k)} = \sigma_{v3}^{(k)} - \left( N_k^-(z) \theta_v^{(k-1)} + N_k^+(z) \theta_v^{(k)} \right) \left( \sigma_{vv}^{0(k)} + \sigma_{vv}^{(k)} \right) - \left( N_k^-(z) \theta_t^{(k-1)} + N_k^+(z) \theta_t^{(k)} \right) \left( \sigma_{vt}^{0(k)} + \sigma_{vt}^{(k)} \right)$$

Wir bemerken, daß durch die Annahme der Näherungsformeln (4) in der vorliegenden geometrisch nichtlinearen Theorievariante die tangentialen Deformationen sich über die Dicke der k-ten Schicht linear ändern, was mit der Näherung (2) übereinstimmt. Das hat keinen Einfluß auf die Allgemeinheit der vorgeschlagenen Theorie und ist für dünne Schalen eine natürliche Voraussetzung.

Die Gleichgewichtsbedingungen der mehrschichtigen anisotropen Schale erhalten wir durch Multiplikation der ersten beiden Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (5) mit den Formfunktionen  $N_k^-(z)$ ,  $N_k^+(z)$  und anschließende Integration über die Koordinate  $z$  von  $\delta_{k-1}$  bis  $\delta_k$ . Auch die dritte Gleichung (5) integrieren wir über die Koordinate  $z$  aber jetzt von  $\delta_0$  bis  $\delta_N$  mit Berücksichtigung von (9) - (11). Durch Abstimmung im Sinne der Variationsmethode - vgl. die Gl. (1) im Teil 1 - erhalten wir  $2N+3$  nichtlineare Differentialgleichungen

$$\frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial H_{\gamma\gamma}^{(\ell)}}{\partial \alpha_\gamma} + \frac{1}{A_\delta} \frac{\partial H_{\gamma\delta}^{(\ell)}}{\partial \alpha_\delta} + \rho_\gamma \left( H_{\gamma\gamma}^{(\ell)} - H_{\delta\delta}^{(\ell)} \right) + 2\rho_\delta H_{\gamma\delta}^{(\ell)} + k_\gamma S_{\gamma 3}^{(\ell)} + M_{\gamma 3}^{(\ell)} + \delta_{N\ell} p_\gamma^+ - \delta_{0\ell} p_\gamma^- = 0 \quad (\gamma \neq \delta) \quad (14)$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial R_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial R_{23}}{\partial \alpha_2} + \rho_1 R_{13} + \rho_2 R_{23} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + p_3^+ - p_3^- = 0$$

$\delta_{0\ell}$ ,  $\delta_{N\ell}$  - Kroneckersymbole;  $T_{\gamma\gamma}$  - klassische Spannungsergebnende in der Schale;  $M_{\gamma 3}^{(\ell)}$ ,  $S_{\gamma 3}^{(\ell)}$ ,  $R_{\gamma 3}$  - verallgemeinerte Spannungsergebnende:

$$\begin{aligned}
 S_{\gamma 3}^{(0)} &= S_{\gamma 3}^{(1)-} & S_{\gamma 3}^{(n)} &= S_{\gamma 3}^{(n)+} + S_{\gamma 3}^{(n+1)-} & S_{\gamma 3}^{(N)} &= S_{\gamma 3}^{(N)+} \\
 M_{\gamma 3}^{(0)} &= \frac{1}{h_1} T_{\gamma 3}^{(1)} & M_{\gamma 3}^{(n)} &= -\frac{1}{h_n} T_{\gamma 3}^{(n)} + \frac{1}{h_{n+1}} T_{\gamma 3}^{(n+1)} & M_{\gamma 3}^{(N)} &= -\frac{1}{h_N} T_{\gamma 3}^{(N)} \\
 T_{\gamma 3}^{(k)} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\gamma 3}^{(k)} dz & S_{\gamma 3}^{(k)\pm} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Sigma_{\gamma 3}^{(k)} N_k^\pm(z) dz \\
 T_{\gamma\gamma} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\gamma\gamma}^{(k)} dz & R_{\gamma 3} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Sigma_{\gamma 3}^{(k)} dz
 \end{aligned} \tag{15}$$

Schließlich integrieren wir wie in Teil 1 die Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (5) über die Normalenkoordinate von  $\delta_0$  bis  $z$  mit Berücksichtigung der Randbedingungen (10) und der Stetigkeitsbedingungen (11). Nach einigen Umformungen kommen wir zu folgenden Formeln für die quergerichteten Komponenten des Spannungstensors

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\gamma 3}^{(k)} &= p_\gamma^- - \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial Q_{\gamma\gamma}^{(k)}}{\partial \alpha_\gamma} - \frac{1}{A_\delta} \frac{\partial Q_{\gamma\delta}^{(k)}}{\partial \alpha_\delta} - \rho_\gamma (Q_{\gamma\gamma}^{(k)} - Q_{\delta\delta}^{(k)}) - 2\rho_\delta Q_{\gamma\delta}^{(k)} - k_\gamma P_{\gamma 3}^{(k)} \quad (\gamma \neq \delta) \\
 \sigma_{33}^{(k)} &= p_3^- - \frac{1}{A_1} \frac{\partial P_{13}^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial P_{23}^{(k)}}{\partial \alpha_2} - \rho_1 P_{13}^{(k)} - \rho_2 P_{23}^{(k)} + k_1 Q_{11}^{(k)} + k_2 Q_{22}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

mit den Beziehungen

$$Q_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} dz + \int_{\delta_{k-1}}^z \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz \quad P_{\alpha 3}^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \Sigma_{\alpha 3}^{(n)} dz + \int_{\delta_{k-1}}^z \Sigma_{\alpha 3}^{(k)} dz \tag{17}$$

Entsprechend den Beziehungen

$$Q_{\alpha\beta}^{(N)}(\delta_N) = \sum_{k=1}^N (H_{\alpha\beta}^{(k)-} + H_{\alpha\beta}^{(k)+}) \quad P_{\alpha 3}^{(N)}(\delta_N) = \sum_{k=1}^N (S_{\alpha 3}^{(k)-} + S_{\alpha 3}^{(k)+})$$

und den Gleichgewichtsgleichungen (14), (15) folgen aus (16), (17) die Randbedingungen (9) für die quergerichteten Spannungen an den äußeren Schalenflächen.

Damit ist die innerlich widerspruchsfreie diskrete geometrisch nichtlineare Theorie der vorgespannten mehrschichtigen anisotropen Schalen mit Berücksichtigung lokaler Effekte aufgebaut. In dieser Theorie sind, analog zum Teil 1 dieses Artikels, die Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (5) punktweise in jeder Schicht mit der für dünne Schalen üblichen Genauigkeit erfüllt.

### 3 Ergebnisse der numerischen Berechnung

Der Algorithmus für die numerische Lösung des hier behandelten Problems ist ähnlich dem Lösungsalgorithmus in Teil 1 dieses Artikels und wird daher hier nicht mehr ausführlich diskutiert. Es sei nur darauf hingewiesen, daß die Berechnung des Reifens unter Innendruck in geometrisch nichtlinearer Form nach der in Grigolyuk und Kulikov (1988a) entwickelten Methode erfolgt. Die Berechnung des durch Innendruck vorgespannten Reifens auf lokale nicht-axialsymmetrische Belastungen dagegen erfolgt in geometrisch linearer Form. Dazu werden der Lösungsvektor und der Vektor der äußeren Belastungen in Fourierreihen in Richtung der Umfangskoordinate

$\alpha_2 = \varphi$  entwickelt. Das im Ergebnis der Zerlegung der Veränderlichen in Sinus- und Kosinusanteile erhaltene System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 4N + 6 -ter Ordnung, in dem die Meridiankoordinate  $\alpha_1 = s$  die unabhängige Veränderliche darstellt, wird nach der Methode der diskreten Orthogonalisierung integriert (Grigolyuk und Kulikov, 1988a). Die Kompliziertheit infolge der höheren Ordnung des lösenden Differentialgleichungssystems ist bei Nutzung eines PC meist unproblematisch, da die modernen Radialreifen in der Regel aus wenigen Schichten gefertigt sind. Es sei bemerkt, daß zur Berechnung der Fourier-Harmonischen für die Belastung die schnelle Fouriertransformation nach Kahaner u.a. (1989) genutzt wurde.

Wir betrachten die Berechnung eines PKW-Reifens 175/70R13 auf die Wirkung der Radiallast  $F = 4000$  N. Hierfür ergibt sich nach vorhandenen Messungen bei einem Innendruck  $p_0 = 0,2$  MPa auf der starren Stützebene eine Kontaktfläche der Größe  $164 \text{ cm}^2$ . Unter der Annahme einer elliptischen Kontaktflächenform gilt dann

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\varphi^2}{\Delta^2} \leq 1$$

mit  $a = 6$  cm;  $\Delta = 0,3$  rad. Entsprechend den Meßwerten kann die Verteilung des Kontaktdrucks näherungsweise wieder als

$$p_3^+ = -q_0 \sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2} - \frac{\varphi^2}{\Delta^2}}$$

angenommen werden, wobei  $q_0 = 0,36$  MPa. Als Bezugsfläche  $S$  wählen wir die Schalenfläche  $S_0$ .

Ebenso wie im Teil I berechnen wir den Reifen für die zwei Varianten des inneren Querschnittsaufbaus nach Bild 3 (in Teil I). Ohne die in Teil I besprochenen Einzelheiten zu wiederholen, stellen wir nur fest, daß wir es in der Variante I mit einer 5-schichtigen Schale ( $N = 5$ ) und in der genaueren Variante II mit einer 7-schichtigen Schale ( $N = 7$ ) zu tun haben.

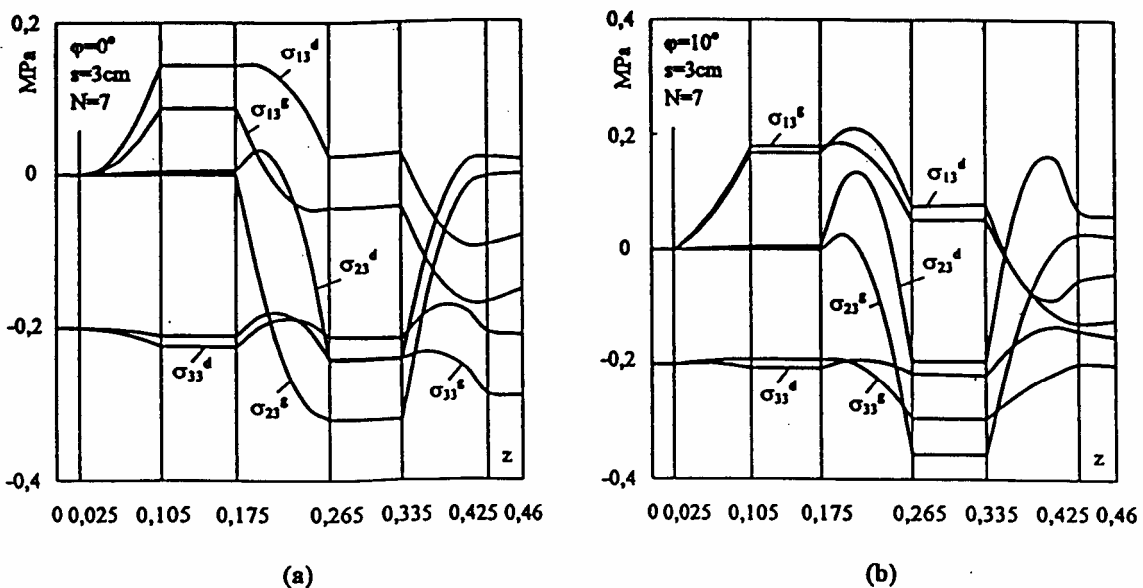


Bild 1. Verteilung der quergerichteten Spannungen  $\sigma_{13}^g$  (globale Theorie vom Typ Timoshenko/Mindlin) und  $\sigma_{13}^d$  (diskrete Theorie mit schichtweisen Verschiebungsansätzen) über die Dicke der Reifenschale im Querschnitt  $s = 3$  cm; (a)  $\varphi = 0^\circ$ ; (b)  $\varphi = 10^\circ$

Zunächst vergleichen wir die rechnerischen Ergebnisse nach der *globalen* Theorie vom Timoshenko/Mindlin-Typ (Index g) mit den Ergebnissen der *diskreten* Theorie mit schichtweisen Verschiebungsansätzen (Index d). In Bild 1 sind die Verläufe der Spannungen  $\sigma_{13}^g$  und  $\sigma_{13}^d$  über die Dicke des Reifens ohne die Protektorschicht ( $0 \leq z \leq 0,46$  cm) im Querschnitt  $s = 3$  cm an den zwei Stellen  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 10^\circ$  auf dem Umfang dargestellt.

Die gezeigten Verläufe entsprechen der Variante II, d.h. der 7-schichtigen Schale. In diesem Falle besteht der Reifen, wie man aus dem Bild 3b (Teil 1) erkennt, aus einer einschichtigen Karkasse mit einer von Gummischichten umgebenen Textilverstärkung in meridionaler Richtung und aus zwei metallkordverstärkten (unter den Winkeln  $\psi = \pm 70^\circ$  zum Meridian) Gürtelschichten, die ebenfalls von Gummizwischenschichten umgeben sind; im Bereich  $0,46 \text{ cm} \leq z \leq 1,62 \text{ cm}$  liegt der Protektor. Aus Bild 1 erkennt man, daß die in Teil 1 dargestellte globale Theorie vom Timoshenko/Mindlin-Typ trotz ihrer starken Vereinfachung die Spannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{33}$  hinreichend genau beschreibt. Bei den Spannungen  $\sigma_{23}$  verändert sich das qualitative Bild des Verlaufs über die Laminatdicke nicht, obwohl sich die Maximalwerte um fast das Doppelte unterscheiden können.

Ein prinzipiell anderes Bild beobachten wir in den Randbereichen des Gürtels. Hier ist die globale Theorie vom Typ Timoshenko/Mindlin nicht mehr zulässig, da sie zu wesentlichen Fehlern bei der Berechnung der quergerichteten Schubspannungen  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  führt.

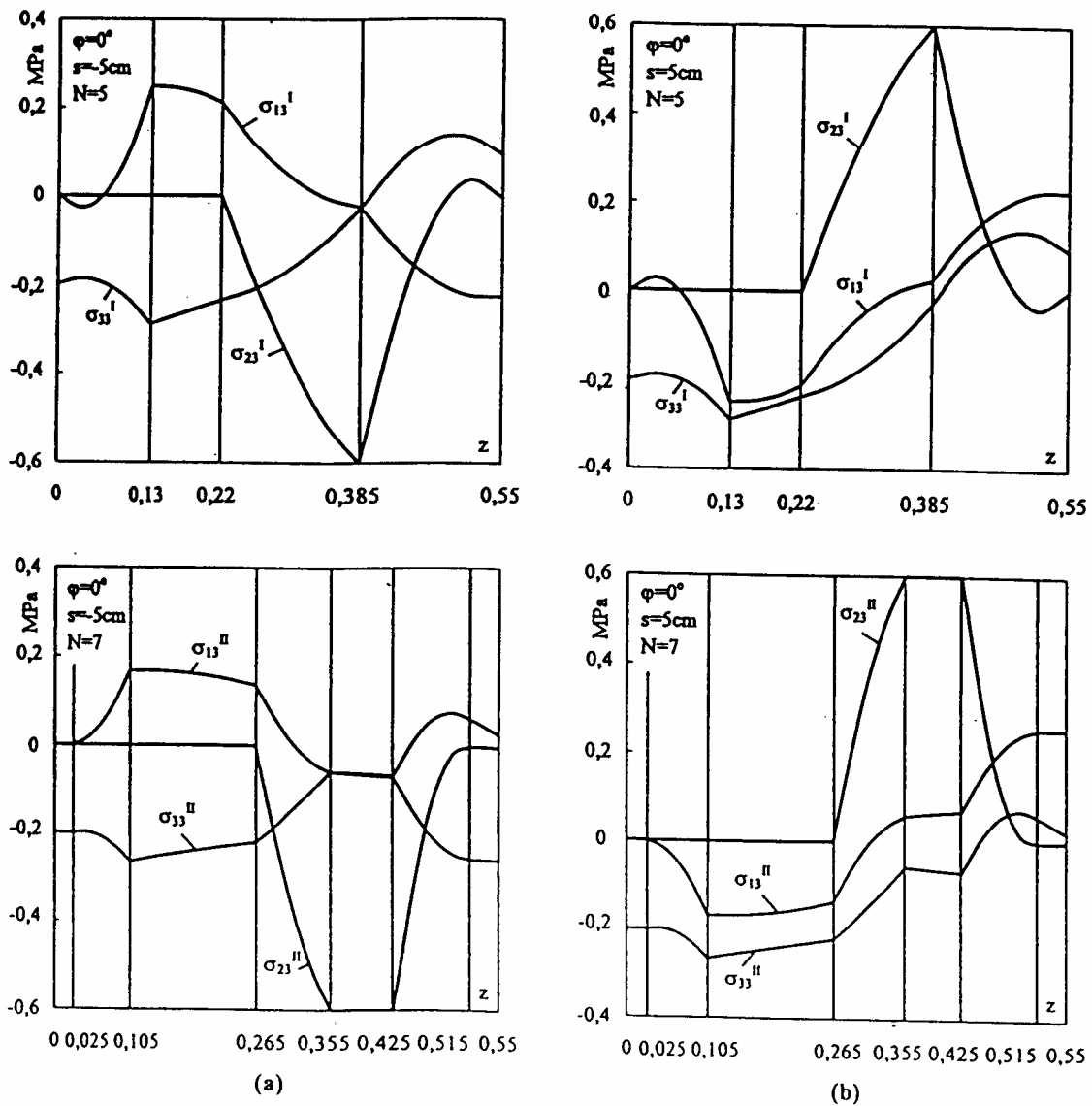


Bild 2

Wir analysieren mit Hilfe der diskreten Theorie mit schichtweisen Verschiebungsansätzen die numerischen Ergebnisse der Reifenberechnung in der Randzone des Gürtels durch Gegenüberstellung der beiden Schichtungsvarianten I und II (siehe Bild 3 in Teil 1). In Bild 2 sind die Verläufe der quergerichteten Spannungen  $\sigma_{13}^I$  und  $\sigma_{13}^{II}$  über die Reifendicke in den Querschnitten  $s = \pm 5$  cm für die drei Werte der Umfangskoordinate  $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  dargestellt. Die numerische Rechnung zeigte, daß die Spannungen in der Protektorschicht (d.h. hier im Bereich  $0,55 \text{ cm} \leq z \leq 1,8 \text{ cm}$ ) für beide Berechnungsvarianten praktisch gleich sind. Daher wird in den Bildern 2a - f die Spannungsverteilung nur im Bereich  $0 \leq z \leq 0,55 \text{ cm}$  gezeichnet. Man erkennt, daß die Schichtungsvariante II zu genaueren Ergebnissen führt, da hier die Steifigkeit der verstärkten Schicht durch Verringerung ihrer Dicke zunimmt. In diesem Falle ist die Dicke der einzelnen Gummi-Kordschicht gleich dem Korddurchmesser und demzufolge wird bei der Berechnung der elastischen Kenngrößen die Steifigkeit nicht über die Schichtdicke „verschmiert“. Man erkennt auch, daß die quergerichteten Schubspannungen  $\sigma_{23}^{II}$  in ihrer Größe vergleichbar sind mit den Spannungen  $\sigma_{13}^{II}$  und an den Trennflächen der Gürtelschichten sogar deren Maximalwerte übertreffen. Das zeugt von der Wirkung des Anisotropieeffektes auf den Spannungszustand des Radialreifens. Wir machen weiter auf die Verletzung der Symmetriebedingung bei  $\varphi = 10^\circ$  und  $\varphi = 20^\circ$  aufmerksam, worauf bereits im Teil 1 des Artikels im Rahmen der globalen Theorie vom Timoshenko/Mindlin-Typ hingewiesen wurde.

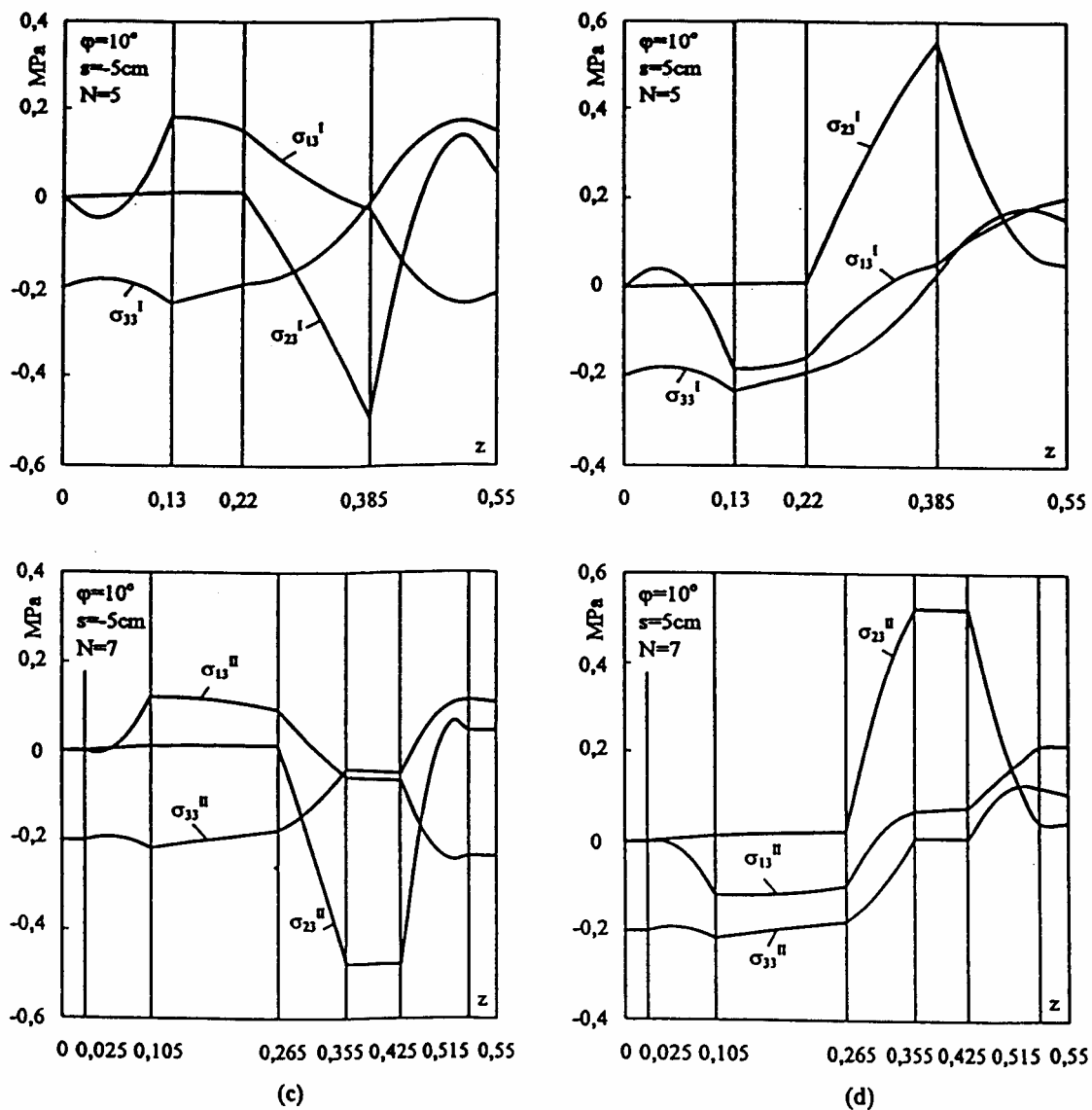


Bild 2



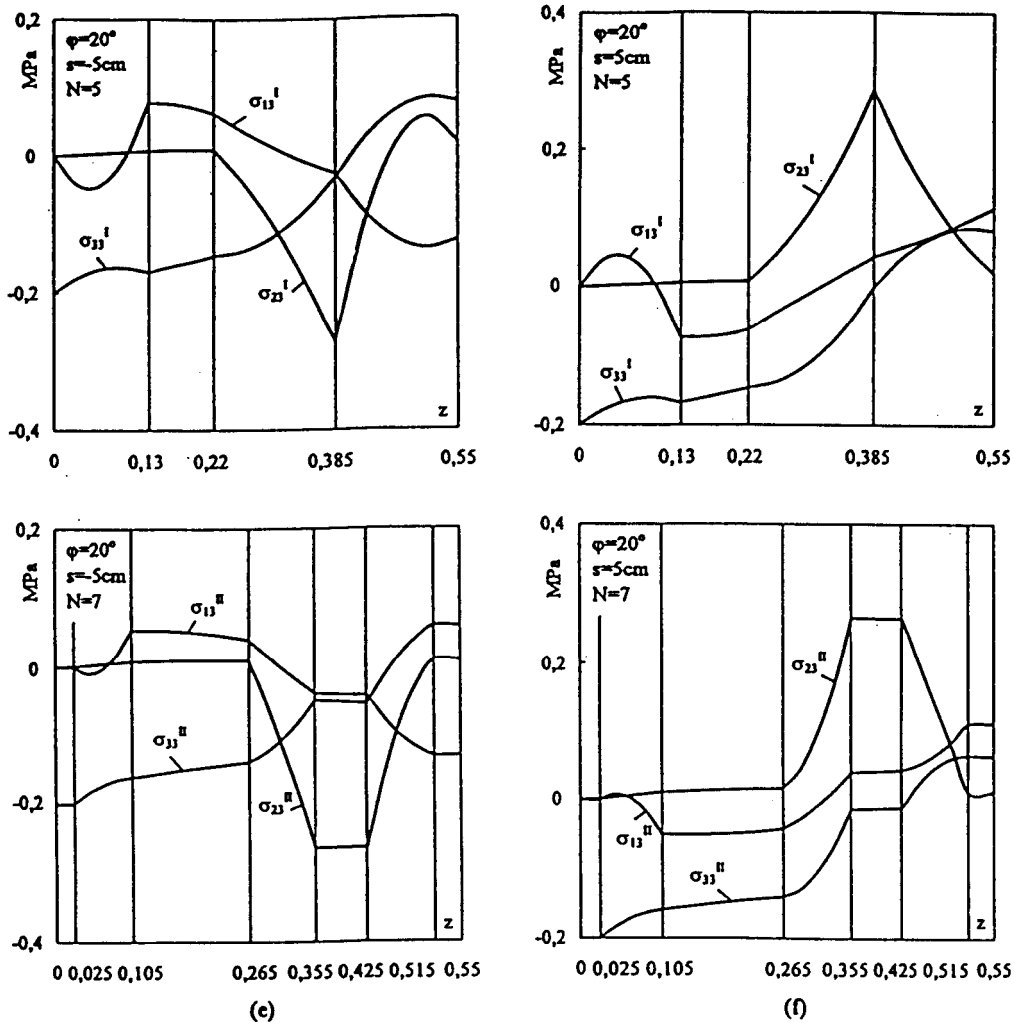


Bild 2. Verteilung der quergerichteten Spannungen  $\sigma_{13}^I$  (Schichtungsvariante I) und  $\sigma_{13}^{II}$  (Schichtungsvariante II) über die Dicke der Reifenschale an den Stellen  $s = \pm 5 \text{ cm}$  ;

(a), (b) bei  $\varphi = 0^\circ$ ; (c), (d) bei  $\varphi = 10^\circ$ ; (e), (f) bei  $\varphi = 20^\circ$

Zum Schluß werden die numerischen Ergebnisse mit Messungen verglichen. In Belkin u.a. (1997) sind für den untersuchten Belastungsfall Werte für die Radialverschiebung des Punktes im Zentrum der Kontaktfläche angegeben, die um 2,4 cm liegen. Unsere numerischen Berechnungen ergaben: für die Schichtungsvariante I  $v_3^I(0,0) = 2,22 \text{ cm}$  und für die Schichtungsvariante II  $v_3^{II}(0,0) = 2,27 \text{ cm}$ . Die im Teil 1 festgestellte gute Übereinstimmung mit Ergebnissen aus der Dissertation von Feng (1995) ist hier ebenfalls gegeben.

## Literatur

1. Belkin A.E., Bukhin B.L., Mukhin O.N., Narskaya N.L.: Some models and methods of pneumatic tire mechanics. Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis. Edited by F. Böhm and H.-P. Willumeit (1997), 250-271.
2. Di Sciuva M.: A general quadrilateral multilayered plate element with continuous interlaminar stresses. Computers & Structures 47, 1, (1993), 91-105.
3. Duda A.: Eine technische Theorie der elastischen dreischichtigen Flächentragwerke mit Anwendungen aus dem Bereich der symmetrisch belasteten Rotationsschalen und Kreisplatten. Dissertation B, TU Dresden (1976).
4. Epstein M., Glockner P.G.: Nonlinear analysis of multilayered shells. Intern. J. Solids and Structures, 13, 11, (1977), 1081-1089.
5. Faria L.O., Oden J.T., Yavari B., Tworzydło W.W., Bass J.M., Becker E.B.: Tire modeling by finite elements. Tire Science and Technology 20, 1, (1992), 33-56.
6. Feng K.: Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen. Diss. TU Berlin 1995, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 12, Nr. 258, VDI-Verlag (1995), 150 S.

7. Grigolyuk E.I.: Endliche Durchbiegungen dreischichtiger Schalen mit starrem Kern. *Izv. AN SSSR, Otd. techn. nauk*, 1, (1958), 26-34 (russ.).
8. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.: Toward a theory of elastic laminated anisotropic shells. *Soviet Physics Doklady*, 29, 4, (1984), 344-345.
9. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.: Theory and numerical solution of problems of the statics of multilayered reinforced shells. *Mechanics Composite Materials*, 22, 4, (1987), 450-457.
10. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.: Mehrschichtige armierte Schalen. Berechnung von Luftreifen. Moskau, *Masinstroenie* (1988a), 288 S. (russ.).
11. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.: General direction of development of the theory of multilayered shells. *Mechanics Composite Materials*, 24, 2, (1988b), 231-241.
12. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P.: Nichtlineare Gleichungen der dünnen elastischen geschichteten anisotropen flachen Schalen mit starrem Kern. *Izv. AN SSSR, Mechanika*, 5 (1965), 68-80 (russ.).
13. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P.: On the theory of multilayered shells. *Contributions to the Theory of Aircraft Structures*, Delft: University Press, (1972), 171-183.
14. Gruttmann F., Wagner W.: On the numerical analysis of local effects in composite structures. *Composite Structures*, 29, 1, (1994), 1-12.
15. Kahaner D., Moler C., Nash S.: *Numerical Methods and Software*. NJ, Prentice-Hall, Inc, (1989).
16. Kulikov G.M.: Thermoelasticity of flexible multilayered anisotropic shells. *Mechanics Solids*, 29, 2, (1994), 27-35.
17. Kulikov G.M.: Computational models for multilayered composite shells with application to tires. *Tire Science and Technology* 24, 1, (1996), 11-38.
18. Lee C.Y., Liu D.: Layer reduction technique for composite laminate analysis. *Computers & Structures*, 44, 6, (1992), 1305-1315.
19. Librescu L.: *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures*. Leyden, Noordhoff Int., (1975), 598 p.
20. Lu X., Liu D.: An interlaminar shear stress continuity theory for both thin and thick composite laminates. *J. Appl. Mech.*, 59, 3, (1992), 502-509.
21. Noor A.K., Burton W.S.: Assessment of computational models for multilayered composite shells. *Applied Mech. Reviews*, 43, 4, (1990), 67-97.
22. Patel H.P., Kennedy R.H.: Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading. *Computers and Structures* 15, 1, (1982), 79-84.
23. Reddy J.N., Barbero E.J., Tepy J.L.: A plate bending element based on a generalized laminate plate theory. *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 28, 10, (1989), 2275-2292.
24. Reddy J.N., Savoia M.: Layer-wise shell theory for postbuckling of laminated circular cylindrical shells. *AIAA J.*, 30, 8, (1992), 2148-2154.
25. Reddy J.N., Starnes J.H.jr.: General buckling of stiffened circular cylindrical shells according to a layerwise theory. *Computers & Structures*, 49, 4, (1993), 605-616.
26. Rothert H., Gall R.: On the three-dimensional computation of steel-belted tires. *Tire Science and Technology* 14, 2, (1986), 116-124.
27. Wisniewski K., Schrefler B.A.: Hierarchical multilayered element of assembled Timoshenko beam. *Computers & Structures* 48, 2, (1993), 255-261.
28. Wu C.P., Yen C.B.: Interlaminar stress mixed finite element analysis of unsymmetrically laminated composite plates. *Computers & Structures*, 49, 3, (1993), 411-419.

### **Danksagung**

Die Autoren danken dem Gutachter für dessen wertvolle Hinweise, die wesentlich zur Erreichung der Qualität und der Klarheit der Formulierungen in Teil 1 und Teil 2 unseres Artikels beigetragen haben.

*Dieser Artikel (Teil 2) ist Ergebnis einer durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG-Projekt 113/287/0(R)) und durch den Russischen Fonds für Grundlagenforschung (RFBR 98-01-04076) geförderten Zusammenarbeit.*

---

*Adressen:* Professor Dr. Gennadi Kulikov, Dr. techn. S. V. Plotnikova, Dept. of Applied Mathematics and Mechanics, Tambov State Technical University, Sovetskaya Street 106, RU-392620 Tambov; Professor Dr. techn. Friedrich Böhm, Professor Dr. sc. techn. Albert Duda, Dr. rer. nat. Ralf Wille, Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin, Sekretariat MS 4, Einsteinufer 5/7, D-10587 Berlin