

УДК 539.3

© 2014 г. Г. М. КУЛИКОВ, С. В. ПЛОТНИКОВА

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОТСЧЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрен новый метод решения задач теории упругости для толстых и тонких оболочек в пространственной постановке. Метод основан на концепции отсчетных поверхностей внутри оболочки. Согласно этому методу в теле оболочки вводятся N отсчетных поверхностей, параллельных срединной поверхности и расположенных в узлах многочлена Чебышёва, для того чтобы выбрать векторы перемещений этих поверхностей $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^N$ в качестве искомым функций. Такой выбор искомым функций позволяет представить разрешающие уравнения предложенной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и получить деформационные соотношения, которые корректно описывают перемещения оболочки как жесткого тела.

Ключевые слова: теория упругости, теория оболочек высокого порядка, метод отсчетных поверхностей.

1. Введение. Традиционный путь построения теории оболочек состоит в разложении перемещений в степенные ряды относительно поперечной координаты θ_3 , отсчитываемой вдоль внешней нормали к срединной поверхности. Для приближенного представления поля перемещений можно воспользоваться конечными отрезками степенных рядов, поскольку основная цель теории упругих оболочек состоит в получении приближенных решений задач трехмерной теории упругости. Идея этого подхода восходит к Коши [1]. Однако кажущееся преимущество этой теории теряется при ее применении в задачах статики толстых упругих оболочек, в которых для получения приемлемых результатов необходимо удерживать достаточно большое число членов в соответствующих разложениях.

Более продуктивный подход связан с введением в теле оболочки отсчетных поверхностей $\Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^N$, параллельных срединной поверхности, с целью использования векторов перемещений этих поверхностей в качестве искомым функций [2, 3]. Такой выбор искомым функций с последующим использованием полиномов Лагранжа степени $N - 1$ в пространственных аппроксимациях перемещений позволил представить разрешающие уравнения предложенной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и построить деформационные соотношения, которые точно представляют перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат. Однако доказательство этого фундаментального утверждения представлено не было. Отметим также, что идея метода отсчетных поверхностей восходит к работам [4–9], в которых на основе введения лицевых поверхностей оболочки Ω^-, Ω^+ в качестве отсчетных построены различные варианты геометрически линейной и нелинейной теорий оболочек.

Теория оболочек высокого порядка [2, 3] основана на использовании эквидистантных отсчетных поверхностей, при этом лицевые поверхности оболочки выбираются в качестве отсчетных. Это ограничивает применение данной теории для расчета толстых оболочек. Дело в том, что предложенная пространственная полиномиальная интерполяция вектора перемещений с использованием полиномов Лагранжа высокой степени может приводить вследствие феномена Рунге к значительной осцилляции полиномиальных аппроксимаций в зоне краевого эффекта. Этот феномен был открыт в [10] при изучении погрешности полиномиальной интерполяции для приближения некоторых функций на равномерной сетке. С возрастанием степени полинома погрешность интерполяции может стремиться к бесконечности. В численном анализе для борьбы с указанным явлением в качестве узлов интерполяции принято использовать корни многочлена Чебышёва [11], что помогает существенно улучшить поведение полиномиальных аппроксимаций высокой степени, для которых ошибка интерполяции стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Это дает возможность находить решение трехмерных задач статики для толстых оболочек с любой наперед заданной точностью при достаточно большом числе отсчетных поверхностей.

2. Кинематика оболочки. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h . Отнесем срединную поверхность Ω к криволинейным ортогональным координатам θ_1, θ_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн, а координату θ_3 будем отсчитывать в поперечном направлении. Базисные векторы срединной поверхности оболочки имеют вид

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = A_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ – радиус-вектор срединной поверхности; $A_\alpha(\theta_1, \theta_2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы; $\mathbf{e}_\alpha(\theta_1, \theta_2)$ – единичные векторы касательных к координатным линиям θ_α ; $\mathbf{e}_3(\theta_1, \theta_2)$ – единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности. Отметим, что в статье соглашение о суммировании по повторяющимся индексам не применяется.

Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \theta_3 \mathbf{e}_3$ – радиус-вектор оболочки, тогда базисные векторы в теле оболочки можно представить в форме

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = A_\alpha c_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{R}_{,3} = \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

где $c_\alpha = 1 + k_\alpha \theta_3$ – компоненты геометрического тензора сдвига; k_α – главные кривизны.

Обозначим через $\mathbf{R}^I = \mathbf{r} + \theta_3^I \mathbf{e}_3$ радиус-векторы отсчетных поверхностей Ω^I , которые располагаются внутри интервала $(-h/2, h/2)$ в узлах полинома Чебышёва степени N , где θ_3^I – поперечные координаты поверхностей Ω^I , определяемые согласно [11] по формуле

$$\theta_3^I = -\frac{h}{2} \cos\left(\pi \frac{2I-1}{2N}\right) \quad (2.3)$$

Тогда базисные векторы отсчетных поверхностей, показанные на фиг. 1, имеют вид

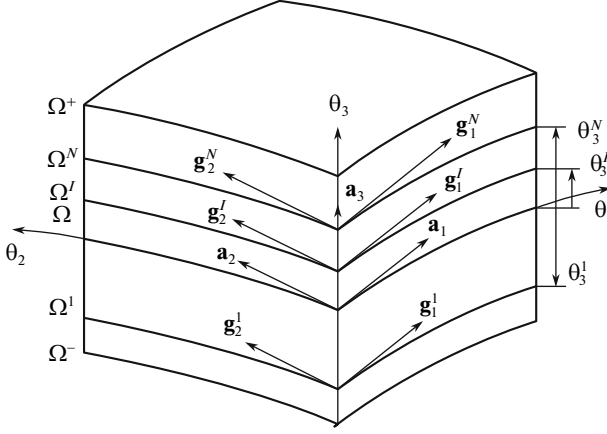
$$\mathbf{g}_\alpha^I = \mathbf{R}_{,\alpha}^I = A_\alpha c_\alpha^I \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3^I = \mathbf{e}_3 \quad (2.4)$$

где $c_\alpha^I = 1 + k_\alpha \theta_3^I$ – компоненты геометрического тензора сдвига на поверхностях Ω^I .

Базисные векторы в теле оболочки в деформированном состоянии находим по формулам

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \bar{\mathbf{R}}_{,i} = \mathbf{g}_i + \mathbf{u}_{,i} \quad (2.5)$$

где $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$ – радиус-вектор деформированной оболочки; \mathbf{u} – вектор перемещений.



Фиг. 1

Базисные векторы отсчетных поверхностей Ω^I в деформированном состоянии представим в форме

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha}^I = \bar{\mathbf{R}}_{,\alpha}^I = \mathbf{g}_{\alpha}^I + \mathbf{u}_{,\alpha}^I, \quad \bar{\mathbf{g}}_3^I = \bar{\mathbf{g}}_3(\theta_3^I) = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}^I \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}^I = \mathbf{u}(\theta_3^I), \quad \boldsymbol{\beta}^I = \mathbf{u}_{,3}(\theta_3^I) \quad (2.7)$$

где $\bar{\mathbf{R}}^I = \mathbf{R}^I + \mathbf{u}^I$ – радиус-векторы поверхностей Ω^I в деформированном состоянии; $\mathbf{u}^I(\theta_1, \theta_2)$ – векторы перемещений поверхностей Ω^I ; $\boldsymbol{\beta}^I(\theta_1, \theta_2)$ – значения производной трехмерного вектора перемещений по координате θ_3 на поверхностях Ω^I . Здесь и далее индексы I, J, K указывают на принадлежность некоторой величины к отсчетной поверхности и принимают значения $1, 2, \dots, N$; греческие индексы $\alpha, \beta = 1, 2$; латинские индексы $i, j, k, m = 1, 2, 3$.

3. Деформационные соотношения. В системе криволинейных ортогональных координат θ_i тензор деформаций можно записать в форме [12, 13]:

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_i A_j c_i c_j} (\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \quad (3.1)$$

где $A_3 = 1$ и $c_3 = 1$. Значения компонент тензора деформаций на отсчетных поверхностях Ω^I имеют вид

$$2\varepsilon_{ij}^I = 2\varepsilon_{ij}(\theta_3^I) = \frac{1}{A_i A_j c_i^I c_j^I} (\bar{\mathbf{g}}_i^I \cdot \bar{\mathbf{g}}_j^I - \mathbf{g}_i^I \cdot \mathbf{g}_j^I) \quad (3.2)$$

Вводя базисные векторы (2.4), (2.6) в деформационные соотношения пространственной теории упругости (3.2) и пренебрегая нелинейными членами, получим

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{A_{\alpha} c_{\alpha}^I} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_{\beta} + \frac{1}{A_{\beta} c_{\beta}^I} \mathbf{u}_{,\beta}^I \cdot \mathbf{e}_{\alpha} \quad (3.3)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{1}{A_{\alpha} c_{\alpha}^I} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_3, \quad \varepsilon_{33}^I = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_3$$

Представим далее векторы \mathbf{u}^I и $\boldsymbol{\beta}^I$ в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i согласно формулам

$$\mathbf{u}^I = \sum_i u_i^I \mathbf{e}_i \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\beta}^I = \sum_i \beta_i^I \mathbf{e}_i \quad (3.5)$$

Из разложения (3.4) с учетом формул дифференцирования базисных векторов \mathbf{e}_i по криволинейным ортогональным координатам [14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_\alpha} \mathbf{e}_{\alpha,\alpha} &= -B_\alpha \mathbf{e}_\beta - k_\alpha \mathbf{e}_3, & \frac{1}{A_\alpha} \mathbf{e}_{\beta,\alpha} &= B_\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{1}{A_\alpha} \mathbf{e}_{3,\alpha} &= k_\alpha \mathbf{e}_\alpha, & B_\alpha &= -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta} \quad (\beta \neq \alpha) \end{aligned} \quad (3.6)$$

следует

$$\frac{1}{A_\alpha} \mathbf{u}_{,\alpha}^I = \sum_i \lambda_{i\alpha}^I \mathbf{e}_i \quad (3.7)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^I + B_\alpha u_\beta^I + k_\alpha u_3^I, \quad \lambda_{\beta\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha}^I - B_\alpha u_\alpha^I \quad (\beta \neq \alpha)$$

$$\lambda_{3\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^I - k_\alpha u_\alpha^I \quad (3.8)$$

Вводя разложения (3.5), (3.7) в формулы (3.3), приходим к скалярной форме линеаризованных деформационных соотношений

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{c_\beta} \lambda_{\alpha\beta}^I + \frac{1}{c_\alpha} \lambda_{\beta\alpha}^I, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \beta_\alpha^I + \frac{1}{c_\alpha} \lambda_{3\alpha}^I, \quad \varepsilon_{33}^I = \beta_3^I \quad (3.9)$$

4. Пространственные аппроксимации перемещений и деформаций. Заметим, что до этого момента не было сделано никаких предположений о характере распределения перемещений и деформаций по толщине оболочки. Пусть перемещения распределены в поперечном направлении оболочки согласно следующему закону [2]:

$$u_i = \sum_I L^I u_i^I \quad (4.1)$$

где $L^I(\theta_3)$ – полиномы Лагранжа степени $N - 1$, определяемые по формуле

$$L^I = \prod_{J \neq I} \frac{\theta_3 - \theta_3^J}{\theta_3^I - \theta_3^J} \quad (4.2)$$

При этом $L^I(\theta_3^J) = 1$, если $J = I$ и $L^I(\theta_3^J) = 0$ если $J \neq I$.

Из соотношений (2.7), (3.5), (4.1), (4.2) имеем

$$\beta_i^I = \sum_J M^J(\theta_3^I) u_i^J \quad (4.3)$$

где $M^I = L_{,3}^I$ – полиномы степени $N - 2$; их значения на отсчетных поверхностях Ω^I находим по формулам

$$M^J(\theta_3^J) = \frac{1}{\theta_3^J - \theta_3^I} \prod_{K \neq I, J} \frac{\theta_3^I - \theta_3^K}{\theta_3^J - \theta_3^K} \quad (J \neq I) \quad (4.4)$$

$$M^I(\theta_3^I) = - \sum_{J \neq I} M^J(\theta_3^I)$$

Таким образом, определяющие функции предлагаемой теории оболочек β_i^J представлены в виде линейной комбинации перемещений отсчетных поверхностей u_i^J .

Следующий шаг состоит в выборе закона распределения деформаций по толщине оболочки. Очевидно, что распределение деформаций в поперечном направлении должно быть согласовано с распределением перемещений (4.1), т.е. имеем

$$\varepsilon_{ij} = \sum_I L^I \varepsilon_{ij}^I \quad (4.5)$$

Теорема. Деформационные соотношения (3.3), (4.5) точно представляют перемещение оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат.

Доказательство. Перемещение отсчетной поверхности Ω^I как жесткого целого можно представить в виде [15, 16]:

$$(\mathbf{u}^I)^{\text{Rigid}} = \Delta + \Phi \times \mathbf{R}^I \quad (4.6)$$

$$\Delta = \sum_i \Delta_i \mathbf{e}_i, \quad \Phi = \sum_i \Phi_i \mathbf{e}_i \quad (4.7)$$

где Δ – вектор поступательного перемещения оболочки; Φ – вектор вращений. Согласно [14] имеем

$$\Delta_{, \alpha} = \mathbf{0}, \quad \Phi_{, \alpha} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Из (4.6) с учетом соотношений (2.1), (3.6), (4.8) следует

$$(\mathbf{u}_{, \alpha}^I)^{\text{Rigid}} = A_{\alpha} c_{\alpha}^I \Phi \times \mathbf{e}_{\alpha} \quad (4.9)$$

Принимая во внимание тождества

$$\sum_J M^J(\theta_3) = 0, \quad \sum_J \theta_3^J M^J(\theta_3) = 1 \quad (4.10)$$

которые в свою очередь вытекают из очевидных тождеств

$$\sum_J L^J(\theta_3) = 1, \quad \sum_J \theta_3^J L^J(\theta_3) = \theta_3 \quad (4.11)$$

и учитывая (2.7), (4.1), (4.6), находим

$$(\beta^I)^{\text{Rigid}} = \sum_J M^J(\theta_3^J) (\mathbf{u}^J)^{\text{Rigid}} = \Phi \times \mathbf{e}_3 \quad (4.12)$$

Вводя (4.9), (4.12) в деформационные соотношения (3.3), получим

$$2(\varepsilon_{ij}^I)^{\text{Rigid}} = (\Phi \times \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j + (\Phi \times \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i = 0 \quad (4.13)$$

что и требовалось доказать.

5. Полная потенциальная энергия. Подставим деформации (4.5) в выражение для полной потенциальной энергии упругого тела [17] и, вводя результирующие напряжений [2]:

$$H_{ij}^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} L^I c_1 c_2 d\theta_3 \quad (5.1)$$

получим

$$\Pi = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sum_I \sum_{i,j} H_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I - \sum_i (c_1^+ c_2^+ p_i^+ u_i^+ - c_1^- c_2^- p_i^- u_i^-) \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 - W_{\Sigma} \quad (5.2)$$

где p_i^- , p_i^+ – поверхностные нагрузки, действующие на внутренней и внешней поверхностях оболочки Ω^- , Ω^+ ; $u_i^- = u_i(-h/2)$, $u_i^+ = u_i(h/2)$ – перемещения поверхностей Ω^- , Ω^+ ; $c_{\alpha}^- = 1 - k_{\alpha} h/2$, $c_{\alpha}^+ = 1 + k_{\alpha} h/2$ – компоненты геометрического тензора сдвига на поверхностях Ω^- , Ω^+ ; W_{Σ} – работа внешних нагрузок, действующих на боковой поверхности оболочки Σ .

Ограничимся рассмотрением линейно упругих материалов, для которых применимы соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,m} C_{ijkm} \varepsilon_{km} \quad (5.3)$$

где C_{ijkm} – тензор модулей упругости.

Введем напряжения (5.3) в (5.1) и, учитывая распределение деформаций в поперечном направлении (4.5), приходим к формуле для вычисления результирующих напряжений

$$H_{ij}^I = \sum_J \sum_{k,m} D_{ijkm}^{IJ} \varepsilon_{km}^J \quad (5.4)$$

$$D_{ijkm}^{IJ} = C_{ijkm} \int_{-h/2}^{h/2} L^I L^J c_1 c_2 d\theta_3 \quad (5.5)$$

6. Численные результаты. В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой короткой цилиндрической оболочки размером $L/R = 4$, нагруженной на внутренней поверхности Ω^- синусоидально распределенной нагрузкой

$$p_3^- = -p_0 \sin \frac{\pi\theta_1}{L} \cos 4\theta_2 \quad (6.1)$$

где L – длина оболочки; R – радиус срединной поверхности; θ_1 , θ_2 – меридиональная и окружная координаты оболочки. Оболочка изготовлена из композиционного материала со следующими механическими характеристиками [18]: $E_L = 25E_T$, $G_{LT} = 0.5E_T$, $G_{TT} = 0.2E_T$, $E_T = 10^6$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$. Индексы L и T соответствуют направлению армирования и поперечному направлению. При этом армирующие волокна направлены в окружном направлении.

Чтобы удовлетворить граничным условиям на торцах оболочки, примем

$$\begin{aligned} u_1^I &= u_{10}^I \cos \frac{\pi\theta_1}{L} \cos 4\theta_2, & u_2^I &= u_{20}^I \sin \frac{\pi\theta_1}{L} \sin 4\theta_2 \\ u_3^I &= u_{30}^I \sin \frac{\pi\theta_1}{L} \cos 4\theta_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Таблица 1

N	$U_3(0)$	$S_{11}(0.5)$	$S_{22}(0.5)$	$S_{12}(-0.5)$	$S_{13}(0)$	$S_{23}(0)$	$S_{33}(-0.5)$
5	7.272	0.914	4.290	-1.597	1.514	-2.128	-1.145
7	7.483	1.167	5.042	-1.741	1.496	-1.987	-1.069
9	7.501	1.287	5.141	-1.759	1.503	-2.073	-1.020
11	7.503	1.324	5.159	-1.761	1.504	-2.052	-1.005
13	7.503	1.332	5.163	-1.761	1.504	-2.056	-1.001
[18]	7.503	1.332	5.163	-1.761	1.504	-2.056	-1.000

Таблица 2

N	$U_3(0)$	$S_{11}(0.5)$	$S_{22}(0.5)$	$S_{12}(-0.5)$	$S_{13}(0)$	$S_{23}(0)$	$S_{33}(-0.5)$
5	7.249	0.937	4.413	-1.583	1.508	-2.125	-1.139
7	7.466	1.202	5.065	-1.730	1.496	-1.983	-1.067
9	7.498	1.354	5.166	-1.756	1.498	-2.065	-1.025
11	7.509	1.439	5.234	-1.764	1.511	-2.068	-1.018
13	7.531	1.520	5.324	-1.773	1.501	-2.041	-1.026
[18]	7.503	1.332	5.163	-1.761	1.504	-2.056	-1.000

Подставляя перемещения (6.2) в формулу для полной потенциальной энергии (5.2) и учитывая соотношения (3.8), (3.9), (4.3), (5.4) и $W_{\Sigma} = 0$, получим

$$\Pi = \Pi(u_{i0}^I) \tag{6.3}$$

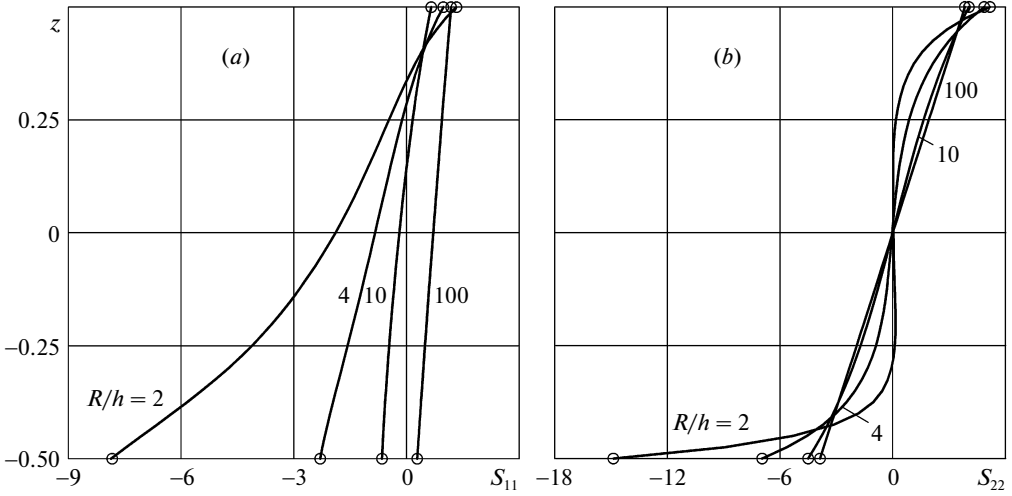
Применяя далее принцип минимума полной потенциальной энергии, приходим к системе линейных алгебраических уравнений порядка $3N$:

$$\partial \Pi / \partial u_{i0}^I = 0 \tag{6.4}$$

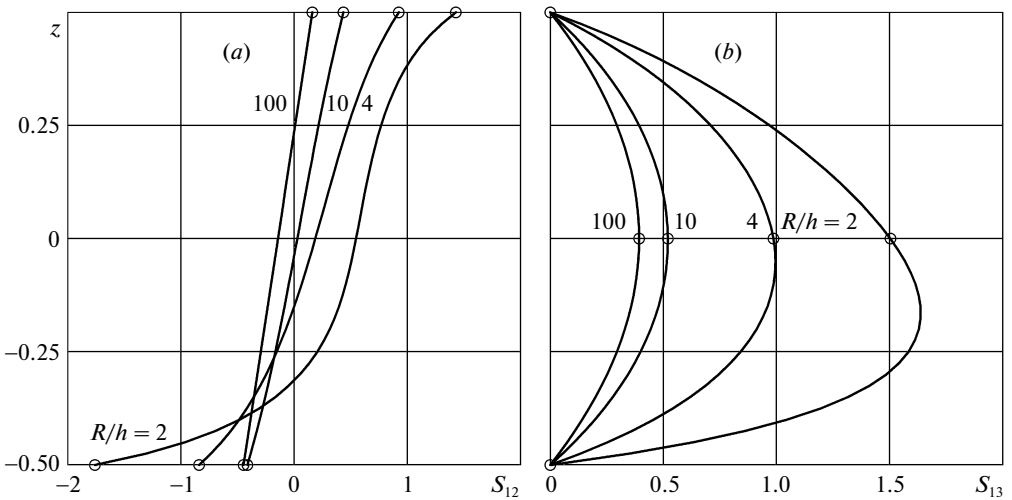
Описанный алгоритм был реализован в среде программирования MATLAB с использованием пакета ToolBox Symbolic Math, позволяющего выполнять символьные вычисления. В результате получено аналитическое решение задачи на основе данной теории оболочек высокого порядка. Для сравнения с аналитическим решением трехмерной задачи теории упругости [18] введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} S_{11} &= 100h^2 \sigma_{11}(L/2, 0, z) / p_0 R^2, & S_{22} &= 10h^2 \sigma_{22}(L/2, 0, z) / p_0 R^2 \\ S_{12} &= 100h^2 \sigma_{12}(0, \pi/8, z) / p_0 R^2, & S_{13} &= 100h \sigma_{13}(0, 0, z) / p_0 R \\ S_{23} &= 10h \sigma_{23}(L/2, \pi/8, z) / p_0 R, & S_{33} &= \sigma_{33}(L/2, 0, z) / p_0 \\ U_3 &= 10E_L h^3 u_3(L/2, 0, z) / p_0 R^4, & z &= \theta_3 / h \end{aligned} \tag{6.5}$$

Данные табл. 1, полученные с использованием отсчетных поверхностей в узлах полинома Чебышёва, и данные табл. 2, полученные путем использования эквидистантных отсчетных поверхностей [3], показывают, что при достаточно большом N можно добиться хорошего согласования с аналитическим решением теории упругости [18]

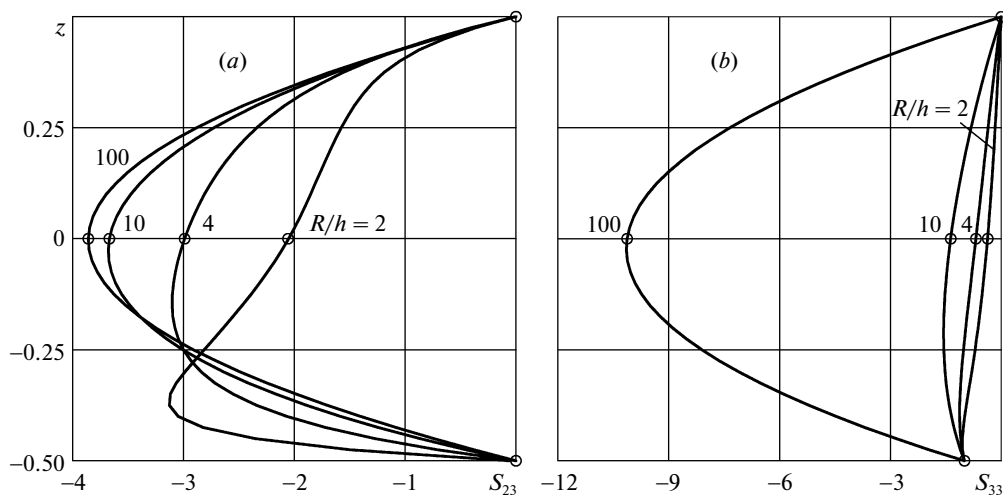


Фиг. 2

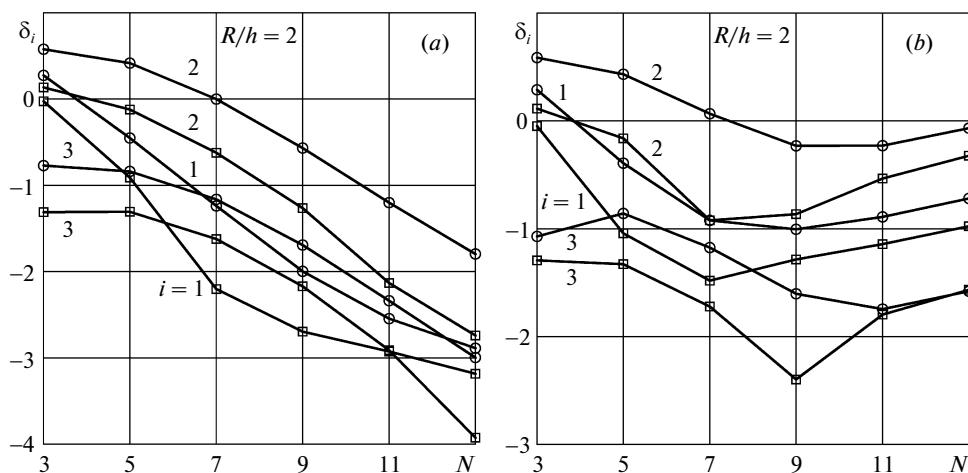


Фиг. 3

даже для толстой оболочки с $R/h = 2$. Заметим, что подход [3] приводит к неплохим результатам при $N = 9$; выбор большего числа отсчетных поверхностей не улучшает результаты расчета вследствие отсутствия равномерной сходимости к точному решению задачи. Распределение безразмерных напряжений S_{ij} по толщине оболочки, представленное на фиг. 2–4, в случае выбора 11 отсчетных поверхностей для оболочек с геометрическими параметрами $R/h = 2, 4, 10, 100$ также свидетельствует о высоком потенциале предложенного метода решения задач статики для толстых и тонких оболочек в пространственной постановке. Сплошные кривые получены на основе



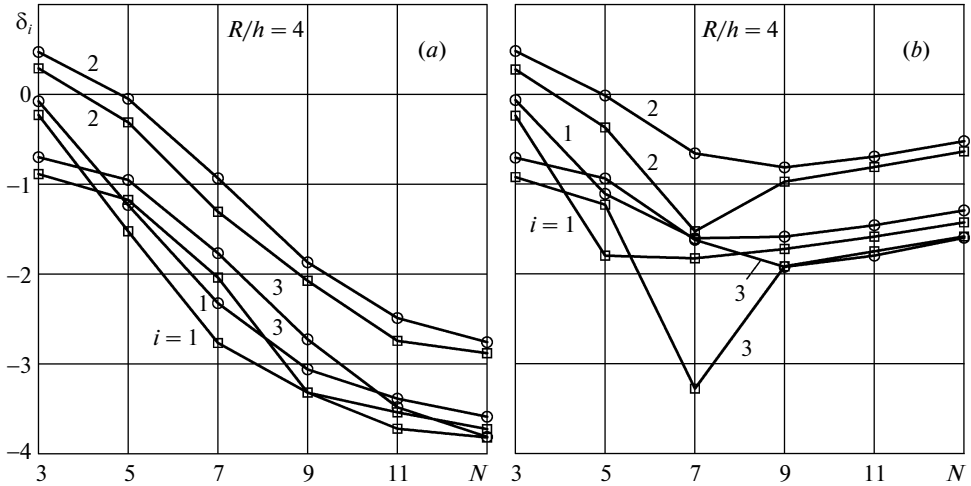
Фиг. 4



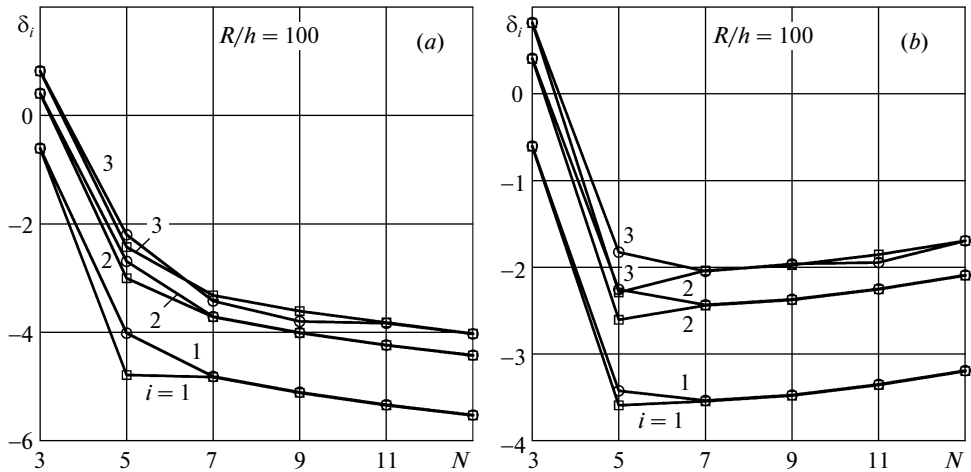
Фиг. 5

данного подхода, кружками показаны результаты [18]. Как видим, граничные условия на лицевых поверхностях оболочки для поперечных компонент тензора напряжений удовлетворяются с достаточно высокой точностью.

Дополнительно на фиг. 5–7 показана логарифмическая погрешность $\delta_i = \lg |S_{i3}^{3D} - S_{i3}|$ удовлетворения граничных условий для этих напряжений на внутренней поверхности (кривые с кружками) и внешней поверхности (кривые с квадратиками) для различных значений параметра N . На фиг. 5, *a*, 6, *a*, 7, *a* изображены результаты решения задачи на основе предложенного метода, на фиг. 5, *b*, 6, *b*, 7, *b* показаны результаты [3]. Как уже отмечалось, расчеты с использованием эквидистантных отсчетных поверхно-



Фиг. 6



Фиг. 7

стей [3] не обеспечивают монотонную сходимость решения и приводят к неадекватному описанию напряженного состояния оболочки в зоне краевого эффекта для интерполяционных полиномов высокой степени.

7. Заключение. Предложен новый метод решения задач пространственной теории упругости для толстых и тонких оболочек. Согласно этому методу внутри оболочки вводятся расположенные в узлах многочлена Чебышёва отсчетные поверхности с целью выбора векторов перемещений этих поверхностей в качестве искомых функций. Показана возможность нахождения решения трехмерных задач статики для упругих оболочек с любой наперед заданной точностью при достаточно большом числе отсчетных поверхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.472.2011) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
2. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение задачи статики для упругой оболочки в пространственной постановке // Докл. РАН. 2011. Т. 439. № 5. С. 613–616.
3. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory // Adv. Structured Materials. 2011. V. 15. P. 715–726.
4. Schoop H. Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen // Ing.-Archiv. 1986. B. 56. № 6. S. 427–437.
5. Никабадзе М.У. Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР 12.07.1988. № 5588–В88. 29 с.
6. Kim Y.H., Lee S.W. A solid element formulation for large deflection analysis of composite shell structures // Comp. Struct. 1988. V. 30. № 1–2. P. 269–274.
7. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет попереочного обжатия // Мех. композит. материалов. 1999. Т. 35. № 4. С. 435–446.
8. Никабадзе М.У. Некоторые геометрические соотношения теории оболочек с двумя базовыми поверхностями // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 129–139.
9. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Finite deformation plate theory and large rigid-body motions // Int. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39. № 7. P. 1093–1109.
10. Runge C. Über empirische Functional und die Interpolation swisher äquidistanten Ordinaten // ZAMP. 1901. B. 46. S. 224–243.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1973. 631 с.
12. Куликов Г.М. Деформационные соотношения, точно представляющие большие перемещения оболочки как жесткого тела // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 5. С. 130–140.
13. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part II. Enhanced finite element technique // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2006. V. 195. № 19–22. P. 2209–2230.
14. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
15. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Equivalent single-layer and layer-wise shell theories and rigid-body motions. Part I: Foundations // Mech. Advanced Mater. Struct. 2005. V. 12. № 4. P. 275–283.
16. Kulikov G.M., Carrera E. Finite deformation higher order shell models and rigid-body motions // Int. J. Solids Struct. 2008. V. 45. № 11–12. P. 3153–3172.
17. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
18. Varadan T.K., Bhaskar K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells. An elasticity approach // Compos. Struct. 1991. V. 17. № 2. P. 141–156.

Тамбов
E-mail: kulikov@apmath.tstu.ru

Поступила в редакцию
11.03.2012