УДК 539.3

Г.М. КУЛИКОВ

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГИБКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Пространственная задача термоупругости для многослойных анизотропных оболочек простейших геометрических форм и при частных видах граничных условий решена в [1, 2]. Расчет термоупругих многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко в геометрически нелинейной постановке обсуждается в [3]. О современном состоянии проблемы можно судить по обзорным статьям [4—7], откуда видно, что задача расчета геометрически нелинейных многослойных анизотропных оболочек, подверженных термомеханическому нагружению, практически не исследована.

В настоящей работе рассмотрены в геометрически нелинейной постановке термоупругие многослойные анизотропные оболочки с учетом локальных эффектов на основе кинематической гипотезы Э. И. Григолюка [8]. При этом слои ориентированы в пакете таким образом, что их оси ортотропии не совпадают с направлениями координатных линий. Отметим, что общая теория многослойных анизотропных оболочек на основе гипотезы Григолюка была построена ранее без учета температурных эффектов в [9, 10].

1. Смешанное вариационное уравнение термоупругости для нелинейной анизотропной оболочки. Рассмотрим тонкую оболочку постоянной толщины h, составленную из N анизотропных слоев. В качестве поверхности приведения П примем внутреннюю поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1, α_2, отсчитываем вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности приведения. Введем некоторые обозначения: h_k — толщина k-слоя; δ_k — расстояние от поверхности приведения до «верхней» граничной поверхности k-го слоя ($\delta_0 = 0$); A_i — параметры Ламе; k_i — кривизны координатных линий; $u_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, z)$, $u_3^{(k)}(\alpha_1, a_2, z)$ — тангенциальные и нормальное перемещения точек k-го слоя; $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $w(\alpha_1, \alpha_2)$ — тангенциальные и нормальное перемещения поверхности приведения; $\beta_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — углы поворота нормали в пределах k-го слоя; $\mu_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — функции, характеризующие распределение поперечных касательных напряжений по толщине k-го слоя: $\tau_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — поперечные касательные напряжения верхней граничной поверхности k-слоя ($\tau_i^{(0)} = p_i^-$, $\tau_i^{(N)} = p_i^+$); p_i^-, q^- и p_i^+, q^+ — компоненты внешних поверхностных нагрузок, действующих на внутренней и внешней поверхностях оболочки. Здесь и далее $i, j = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots, N$.

Введем деформационные характеристики оболочки. Тангенциальные и поперечные компоненты тензора деформаций в случае простейшего нелинейного варианта теории оболочек в квадратичном приближении [11] определим по формулам

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{1}{1 + k_1 z}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2^{(k)} + k_1 u_3^{(k)}\right) + \frac{1}{2}(\theta_1^{(k)})^2$$

$$\varepsilon_{12}^{(k)} = \frac{1}{1 + k_1 z}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^{(k)}\right) +$$

$$+\frac{1}{1+k_2 z}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2^{(k)}\right)+\theta_1^{(k)}\theta_2^{(k)}$$

$$\varepsilon_{13}^{(k)}=\partial u_1^{(k)}/\partial z+\theta_1^{(k)},\quad \varepsilon_{33}^{(k)}=\partial u_3^{(k)}/\partial z \tag{1.1}$$

$$\theta_1^{(k)}=\frac{1}{1+k_1 z}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \alpha_1}-k_1 u_1^{(k)}\right)\quad (1 \rightleftarrows 2)$$

Уравнения равновесия многослойной оболочки получим из смешанного вариационного принципа Рейсснера [12]:

$$\delta\,(J-A)=0 \tag{1.2}$$

который открывает естественный путь сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек. Здесь A — работа внешних нагрузок, а функционал J представим в форме

$$J=\iint\limits_{\Pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}[\sigma_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)}+\sigma_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)}+\sigma_{12}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)}+\sigma_{33}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}+\sigma_{13}^{(k)}\varepsilon_{13}^{(k)}+$$

$$+\sigma_{23}^{(k)}\varepsilon_{23}^{(k)}+G_k]\,A_1A_2\,(1+k_1z)\,(1+k_2z)\,dz\,d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{1.3}$$

где G_k — термодинамический потенциал Гиббса k-го слоя [13]:

$$-G_k=\tfrac{1}{2}a_{11}^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)})^2+a_{12}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}+\underline{a_{13}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}}+a_{16}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}+$$

$$+\tfrac{1}{2}a_{22}^{(k)}(\sigma_{22}^{(k)})^2+\underline{a_{23}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}}+a_{26}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}+\underline{\tfrac{1}{2}a_{33}^{(k)}(\sigma_{33}^{(k)})^2}+$$

$$+a_{36}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}+\tfrac{1}{2}a_{66}^{(k)}(\sigma_{12}^{(k)})^2+\tfrac{1}{2}a_{44}^{(k)}(\sigma_{23}^{(k)})^2+a_{45}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\tfrac{1}{2}a_{55}^{(k)}(\sigma_{13}^{(k)})^2+(\alpha_1^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+\alpha_2^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}+\alpha_3^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}+\alpha_6^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}+$$

$$+\alpha_4^{(k)}\sigma_{23}^{(k)}+\alpha_5^{(k)}\sigma_{13}^{(k)})\,\theta+\tfrac{1}{2}c_\sigma^{(k)}\,\theta^2/T_0 \tag{1.4}$$

Здесь $a_{11}^{(k)},\ldots,a_{66}^{(k)}$ — податливости k-го слоя; $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $\alpha_3^{(k)}$ — коэффициенты линейного температурного расширения k-го слоя; $\alpha_4^{(k)}$, $\alpha_5^{(k)}$, $\alpha_6^{(k)}$ — коэффициенты температурного сдвига k-го слоя; $c_\sigma^{(k)}$ — теплоемкость при постоянном напряжении k-го слоя; $\theta=T-T_0$ — приращение температуры относительно начального состояния T_0.

Предположим, что нормальные напряжения $\sigma_{33}^{(k)}$, действующие на площадках, параллельных площадкам поверхности приведения, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений, поэтому подчеркнутые члены в выражении для термодинамического потенциала Гиббса (1.4) можно опустить. В то же время член $\alpha_3^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}$ следует сохранить, так как коэффициент линейного температурного расширения в направлении, нормальном к поверхности приведения, для композитных материалов может превосходить значения коэффициентов линейного температурного расширения в тангенциальных направлениях.

Введя потенциал G_k из (1.4), деформации (1.1) в смешанный вариационный принцип Рейсснера (1.2), (1.3) и независимо варьируя перемещения и напряжения получим с учетом обобщенных формул интегрирования по частям вариационное уравнение

$$\iint\limits_{\Pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\{-L_1^{(k)}\delta u_1^{(k)}-L_2^{(k)}\delta u_2^{(k)}-L_3^{(k)}\delta u_3^{(k)}+[(\varepsilon_{11}^{(k)}-a_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}-$$

$$- a_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} - a_{16}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} - \alpha_1^{(k)}\theta)\, \delta\sigma_{11}^{(k)} + (\varepsilon_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - a_{22}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} -$$

$$- a_{26}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} - \alpha_2^{(k)}\theta)\, \delta\sigma_{22}^{(k)} + (\varepsilon_{33}^{(k)} - \alpha_3^{(k)}\theta)\, \delta\sigma_{33}^{(k)} + (\varepsilon_{12}^{(k)} - a_{16}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} -$$

$$- a_{26}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} - a_{66}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} - \alpha_6^{(k)}\theta)\, \delta\sigma_{12}^{(k)} + (\varepsilon_{23}^{(k)} - a_{44}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} - a_{45}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)} -$$

$$- \alpha_4^{(k)}\theta)\, \delta\sigma_{23}^{(k)} + (\varepsilon_{13}^{(k)} - a_{45}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} - a_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)} - \alpha_5^{(k)}\theta)\, \delta\sigma_{13}^{(k)}]\, H_1H_2\}\, dz\, d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} [(\sigma_{13}^{(N)} - p_1^+)\, \delta u_1^{(N)} + (\sigma_{23}^{(N)} - p_2^+)\, \delta u_2^{(N)} + (\sigma_{33}^{(N)} - q^+)\, \delta u_3^{(N)}]\, H_1H_2 \Big|_{z=\delta_N} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \iint\limits_{\Pi} [(\sigma_{13}^{(1)} - p_1^-)\, \delta u_1^{(1)} + (\sigma_{23}^{(1)} - p_2^-)\, \delta u_2^{(1)} + (\sigma_{33}^{(1)} - q^-)\, \delta u_3^{(1)}]\, H_1H_2 \Big|_{z=\delta_0} d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} \sum_{n=1}^{N-1} [(\sigma_{13}^{(n)}\delta u_1^{(n)} - \sigma_{13}^{(n+1)}\delta u_1^{(n+1)}) + (\sigma_{23}^{(n)}\delta u_2^{(n)} - \sigma_{23}^{(n+1)}\delta u_2^{(n+1)}) + (\sigma_{33}^{(n)}\delta u_3^{(n)} -$$

$$- \sigma_{33}^{(n+1)}\delta u_3^{(n+1)})\,]\, H_1H_2 \Big|_{z=\delta_n} d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Gamma_2^+} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{11}^{(k)} - X_1^+)\, \delta u_1^{(k)} +$$

$$+ (\sigma_{12}^{(k)} - X_2^+)\, \delta u_2^{(k)} + (S_{13}^{(k)} - X_3^+)\, \delta u_3^{(k)}]\, H_2 \Big|_{\alpha_1=\alpha_1^+} dz\, d\alpha_2 - \int\limits_{\Gamma_2^-} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{11}^{(k)} - X_1^-)\, \delta u_1^{(k)} +$$

$$+ (\sigma_{12}^{(k)} - X_2^-)\, \delta u_2^{(k)} + (S_{13}^{(k)} - X_3^-)\, \delta u_3^{(k)}]\, H_2 \Big|_{\alpha_1=\alpha_1^-} dz\, d\alpha_2 +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1^+} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{12}^{(k)} - Y_1^+)\, \delta u_1^{(k)} + (\sigma_{22}^{(k)} - Y_2^+)\, \delta u_2^{(k)} + (S_{23}^{(k)} - Y_3^+)\, \delta u_3^{(k)}]\, H_1 \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^+} dz\, d\alpha_1 -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1^-} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{12}^{(k)} - Y_1^-)\, \delta u_1^{(k)} + (\sigma_{22}^{(k)} - Y_2^-)\, \delta u_2^{(k)} +$$

$$+ (S_{23}^{(k)} - Y_3^-)\, \delta u_3^{(k)}]\, H_1 \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^-} dz\, d\alpha_1 = 0 \qquad (1.5)$$

где $X_i^\pm$, $X_3^\pm$ и $Y_i^\pm$, $Y_3^\pm$ — внешние поверхностные нагрузки, действующие на боковых поверхностях оболочки $\alpha_1 = \alpha_1^\pm$ и $\alpha_2 = \alpha_2^\pm$; $L_i^{(k)} L_3^{(k)}$ — нелинейные дифференциальные операторы пространственной теории упругости [11], соответствующие введенному полю деформаций (1.1):

$$L_1^{(k)} = \frac{\partial (H_2\sigma_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - \frac{H_1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\sigma_{22}^{(k)} + \frac{\partial (H_1\sigma_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{H_2}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\sigma_{12}^{(k)} + \frac{\partial (H_1H_2\sigma_{13}^{(k)})}{\partial z} + k_1A_1H_2S_{13}^{(k)}$$

$$L_3^{(k)} = \frac{\partial (H_2S_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (H_1S_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (H_1H_2\sigma_{33}^{(k)})}{\partial z} - k_1A_1H_2\sigma_{11}^{(k)} - k_2A_2H_1\sigma_{22}^{(k)} \qquad (1.6)$$

$$S_{13}^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + \theta_1^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + \theta_2^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}, \quad H_1 = A_1(1 + k_1z) \ (1 \rightleftarrows 2)$$

2. Разрешающие уравнения многослойной анизотропной оболочки средней толщины. При построении теории многослойных анизотропных оболочек с учетом локальных эффектов воспользуемся кинематической гипотезой Э. И. Григолюка о кусочно-линейном законе изменения тангенциальных перемещений по толщине оболочки [12]:

$$u_i^{(k)} = u_i + \sum_{n=1}^{N} \pi_{kn}\beta_i^{(n)} + (z - \delta_{k-1})\,\beta_i^{(k)} \qquad (2.1)$$

$$\pi_{kn} = \begin{cases} h_n & \text{при } k > n \\ 0 & \text{при } k \le n \end{cases}$$

и кинематической гипотезой [14] о нелинейной зависимости нормальных перемещений от поперечной координаты в пределах k-го слоя

$$u_3^{(k)} = w + \gamma_\theta^{(k)}, \quad \gamma_\theta^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_3^{(n)} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \theta dz + \alpha_3^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{z} \theta dz \tag{2.2}$$

Для поперечных касательных напряжений примем независимую аппроксимацию [12]

$$\sigma_{i3}^{(k)} = \overline{M}_k(z)\, \tau_i^{(k-1)} + M_k(z)\, \tau_i^{(k)} + f_k(z)\, \mu_i^{(k)} \tag{2.3}$$

$$M_k(z) = \frac{1}{h_k}(z - \delta_{k-1}), \quad \overline{M}_k(z) = 1 - M_k(z), \; f_k(z) = \frac{6}{h_k}\overline{M}_k(z)\, M_k(z)$$

Внесем перемещения и поперечные касательные напряжения согласно формулам (2.1), (2.2), (2.3) в вариационное уравнение (1.5) и, приравнивая нулю выражения, стоящие перед вариациями независимых переменных u_i, $\beta_i^{(k)}$, w, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$, $\tau_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ получим:

соотношения упругости для тангенциальных напряжений и деформаций

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + a_{16}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_1^{(k)}\theta$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)} = a_{12}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_2^{(k)}\theta$$

$$\varepsilon_{12}^{(k)} = a_{16}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_6^{(k)}\theta \tag{2.4}$$

уравнения для определения поперечных нормальных деформаций

$$\varepsilon_{33}^{(k)} = \alpha_3^{(k)}\theta \tag{2.5}$$

которые тождественно удовлетворяются согласно формулам (1.1), (2.2);

интегральные соотношения упругости для поперечных касательных напряжений и деформаций

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Lambda_i^{(k)} f_k(z)\, dz = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.6}$$

$$\int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \Lambda_i^{(n)} M_n(z)\, dz + \int_{\delta_n}^{\delta_{n+1}} \Lambda_i^{(n+1)}\overline{M}_{n+1}(z)\, dz = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$\Lambda_1^{(k)} = \varepsilon_{13}^{(k)} - a_{45}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} - a_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)} - \alpha_5^{(k)}\theta \quad (1 \rightleftarrows 2, \; 4 \rightleftarrows 5)$$

2N + 2 уравнений равновесия многослойной оболочки в усилиях и моментах

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} L_i^{(k)}\, dz = 0 \tag{2.7}$$

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} L_i^{(k)}(z - \delta_{k-1})\, dz + \sum_{n=1}^{N} \pi_{nk} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} L_i^{(n)} dz = 0$$

N нелинейных уравнений пространственной теории упругости

$$L_3^{(k)} = 0 \tag{2.8}$$

граничные условия на внутренней поверхности оболочки $z = \delta_0$:

$$\sigma_{i3}^{(1)} = p_i^-, \quad \sigma_{33}^{(1)} = q^- \tag{2.9}$$

первые два из которых удовлетворяются согласно (2.3);
граничные условия на внешней поверхности оболочки $z = \delta_N$:

$$\sigma_{i3}^{(N)} = p_i^+, \quad \sigma_{33}^{(N)} = q^+ \tag{2.10}$$

первые два из которых удовлетворяются согласно (2.3);
условия непрерывности на поверхностях раздела слоев $z = \delta_n$:

$$\sigma_{i3}^{(n)} = \sigma_{i3}^{(n+1)}, \quad \sigma_{33}^{(n)} = \sigma_{33}^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{2.11}$$

первые $2N—2$ из которых удовлетворяются согласно (2.3);
граничные условия на боковых поверхностях $\alpha_1 = \alpha_1^+$, $\alpha_1 = \alpha_1^-$:

$$(T_{11} - T_{11}^{\pm})\,\delta u_1 = 0, \quad (T_{12} - T_{12}^{\pm})\,\delta u_2 = 0, \quad (T_{13} - Q_1^{\pm})\,\delta w = 0$$

$$(\Phi_{11}^{(k)} - \Phi_{11}^{(k)\pm})\,\delta\beta_1^{(k)} = 0, \quad (\Phi_{12}^{(k)} - \Phi_{12}^{(k)\pm})\,\delta\beta_2^{(k)} = 0 \tag{2.12}$$

граничные условия на боковых поверхностях $\alpha_2 = \alpha_2^+$, $\alpha_2 = \alpha_2^-$, получаемые из граничных условий (2.12) перестановкой индексов ($1 \rightleftarrows 2$).

В соотношениях (2.12) введены классические усилия и обобщенные моменты по формулам

$$T_{rm} = \sum_{k=1}^{N} T_{rm}^{(k)}, \quad Q_1 = \sum_{k=1}^{N} Q_1^{(k)}$$

$$\Phi_{rm}^{(k)} = M_{rm}^{(k)} - \delta_{k-1}T_{rm}^{(k)} + \sum_{n=1}^{N} \pi_{nk}T_{rm}^{(n)} \quad (1 \rightleftarrows 2;\ r, m = 1, 2, 3)$$

$$T_{11}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{11}^{(k)} (1 + k_2 z)\,dz, \quad T_{12}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{12}^{(k)} (1 + k_2 z)\,dz$$

$$T_{13}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{13}^{(k)} (1 + k_2 z)\,dz, \quad Q_1^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{13}^{(k)} (1 + k_2 z)\,dz$$

$$M_{11}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{11}^{(k)} z(1 + k_2 z)\,dz, \quad M_{12}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{12}^{(k)} z\,(1 + k_2 z)\,dz$$

$$M_{13}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{13}^{(k)} z\,(1 + k_2 z)\,dz \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{2.13}$$

С учетом обозначений (2.13) уравнения равновесия многослойной оболочки средней толщины (2.7) можно записать так:

$$\frac{\partial (A_2T_{11})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} + \frac{\partial (A_1T_{21})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} + A_1A_2k_1T_{13} =$$

$$= A_1A_2\,(p_1^- - p_1^+) \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial (A_2\Phi_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Phi_{22}^{(k)} + \frac{\partial (A_1\Phi_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Phi_{12}^{(k)} - A_1A_2\,(Q_1^{(k)} - k_1\Phi_{13}^{(k)}) =$$

$$= -A_1A_2h_kp_1^+ \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{2.15}$$

Проинтегрируем уравнение пространственной теории упругости (2.8) по координате z с учетом условий непрерывности (2.11) и граничных условий (2.9). В результате получим

$$\sigma_{33}^{(k)} = q^- - \frac{1}{H_1 H_2}\Big(\frac{\partial (A_2 T_{13}^{(k)}[z])}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 T_{23}^{(k)}[z])}{\partial \alpha_2} -$$

$$- A_1 A_2 (k_1 T_{11}^{(k)}[z] + k_2 T_{22}^{(k)}[z])\Big) \tag{2.16}$$

$$T_{11}^{(k)}[z] = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \sigma_{11}^{(n)} (1 + k_2 z)\, dz + \int_{\delta_{k-1}}^{z} \sigma_{11}^{(k)} (1 + k_2 z)\, dz \tag{2.17}$$

$$T_{13}^{(k)}[z] = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} S_{13}^{(n)} (1 + k_2 z)\, dz + \int_{\delta_{k-1}}^{z} S_{13}^{(k)} (1 + k_2 z)\, dz \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.10) и принимая во внимание равенства $T_{11}^{(N)}[\delta_N] = T_{11}$, $T_{13}^{(N)}[\sigma_N] = T_{13}$ $(1 \rightleftarrows 2)$, приходим к последнему уравнению равновесия многослойной оболочки

$$\partial (A_2 T_{13})/\partial \alpha_1 + \partial (A_1 T_{23})/\partial \alpha_2 - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + K_2 T_{22}) = A_1 A_2 (q^- - q^+) \tag{2.18}$$

3. Разрешающие уравнения тонкой многослойной оболочки. Введя перемещения (2.1), (2.2) в деформационные выражения (1.1), пренебрегая членами $k_i z$ по сравнению с единицей и полагая, что функции $\gamma_0^{(k)}$ имеют малый показатель изменяемости по координате α_i, получим

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = E_{ij} + \sum_{n=1}^{N} \pi_{kn} K_{ij}^{(n)} + (z - \delta_{k-1}) K_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} k_i \gamma_0^{(k)}$$

$$\varepsilon_{i3}^{(k)} = \beta_i^{(k)} - \theta_i, \quad \varepsilon_{33}^{(k)} = \alpha_3^{(k)} \theta \tag{3.1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, E_{ij} — деформации поверхности приведения:

$$E_{11} = \varepsilon_1 + \theta_1^2/2, \quad E_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1 \theta_2$$

$$K_{11}^{(k)} = \varkappa_1^{(k)}, \quad K_{12}^{(k)} = \xi_1^{(k)} + \xi_2^{(k)}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + k_1 w, \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1$$

$$\varkappa_1^{(k)} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \beta_1^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\beta_2^{(k)}, \quad \xi_1^{(k)} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \beta_2^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\beta_1^{(k)}$$

$$\theta_1 = k_1 u_1 - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

Если снова воспользоваться допущением о тонкостенности оболочки, приняв упрощенные формулы для усилий и моментов

$$T_{ij}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^{(k)} dz, \quad M_{ij}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^{(k)} z\, dz, \quad Q_i^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{i3}^{(k)} dz$$

$$T_{13} = N_1, \quad N_1 = Q_1 - \theta_1 T_{11} - \theta_2 T_{12} \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.2}$$

а в уравнениях (2.15) дополнительно пренебречь обобщенными моментами от перерезывающих напряжений $\Phi_{13}^{(k)}$, то в этом случае уравнения равновесия (2.14), (2.15), (2.18) по форме записи совпадают с соответствующими уравнениями равновесия теории тонких многослойных оболочек на основе кинематической гипотезы Э. И. Григолюка [15], полученными без учета температурных напряжений. По физической же сущности это разные уравнения и различаются они в первую очередь наличием в формулах для усилий и моментов слагаемых, отвечающих учету температурных воздействий.

Соотношения упругости (2.4) перепишем в матричной форме, предварительно разрешив их относительно напряжений

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{matrix} \right\| = \mathbf{b}^{(k)} \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{11}^{(k)} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} \\ \varepsilon_{12}^{(k)} \end{matrix} \right\| - \theta \left\| \begin{matrix} \eta_1^{(k)} \\ \eta_2^{(k)} \\ \eta_6^{(k)} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{b}^{(k)} = \left\| \begin{matrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{16}^{(k)} \\ b_{12}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{26}^{(k)} \\ b_{16}^{(k)} & b_{26}^{(k)} & b_{66}^{(k)} \end{matrix} \right\| \qquad (3.3)$$

Формулы для определения элементов матрицы тангенциальных жесткостей k-го слоя $\mathbf{b}^{(k)}$ представлены в [12]; $\eta_1^{(k)}$, $\eta_2^{(k)}$, $\eta_6^{(k)}$ — тангенциальные компоненты тензора температурных напряжений при стесненных деформациях:

$$\eta_1^{(k)} = b_{11}^{(k)}\alpha_1^{(k)} + b_{12}^{(k)}\alpha_2^{(k)} + b_{16}^{(k)}\alpha_6^{(k)}$$

$$\eta_2^{(k)} = b_{12}^{(k)}\alpha_1^{(k)} + b_{22}^{(k)}\alpha_2^{(k)} + b_{26}^{(k)}\alpha_6^{(k)}$$

$$\eta_6^{(k)} = b_{16}^{(k)}\alpha_1^{(k)} + b_{26}^{(k)}\alpha_2^{(k)} + b_{66}^{(k)}\alpha_6^{(k)}$$

Подставив напряжения (3.3) в формулы (2.13) с учетом деформационных соотношений (3.1) и формул (3.2), приходим к выражениям, связывающим усилия и моменты с деформационными характеристиками оболочки

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{matrix} \right\| = \mathbf{A} \left\| \begin{matrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{matrix} \right\| + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}^{(n)} \left\| \begin{matrix} K_{11}^{(n)} \\ K_{22}^{(n)} \\ K_{12}^{(n)} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} T_{\theta 1} \\ T_{\theta 2} \\ T_{\theta 6} \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_{11}^{(k)} \\ \Phi_{22}^{(k)} \\ \Phi_{12}^{(k)} \end{matrix} \right\| = \mathbf{D}^{(k)} \left\| \begin{matrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{matrix} \right\| + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}^{(kn)} \left\| \begin{matrix} K_{11}^{(n)} \\ K_{22}^{(n)} \\ K_{12}^{(n)} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \Phi_{\theta 1}^{(k)} \\ \Phi_{\theta 2}^{(k)} \\ \Phi_{\theta 6}^{(k)} \end{matrix} \right\| \qquad (3.4)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{A}^{(n)}, \quad \mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} - \delta_{k-1}\mathbf{A}^{(k)} + \sum_{n=1}^{N} \pi_{nk}\mathbf{A}^{(n)}$$

$$\mathbf{F}^{(kn)} = \delta_{kn} \left[\mathbf{C}^{(n)} - \delta_{n-1}\mathbf{B}^{(n)} - \delta_{n-1} (\mathbf{B}^{(n)} - \delta_{n-1}\mathbf{A}^{(n)})\right] + \pi_{kn} (\mathbf{B}^{(k)} - \delta_{k-1}\mathbf{A}^{(k)}) +$$

$$+ \pi_{nk} (\mathbf{B}^{(n)} - \delta_{n-1}\mathbf{A}^{(n)}) + \sum_{m=1}^{N} \pi_{mk}\pi_{mn}\mathbf{A}^{(m)}$$

$$\mathbf{A}^{(k)} = (\delta_k - \delta_{k-1})\, \mathbf{b}^{(k)}, \quad \mathbf{B}^{(k)} = 1/2\, (\delta_k^2 - \delta_{k-1}^2)\, \mathbf{b}^{(k)} \quad \mathbf{C}^{(k)} = 1/3\, (\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3)\, \mathbf{b}^{(k)}$$

Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}^{(k)}$, $\mathbf{F}^{(kn)}$ — матрицы жесткости, а интегральные характеристики температурного поля имеют вид

$$T_{\theta m}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} t_{\theta m}^{(k)} dz, \quad M_{\theta m}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} t_{\theta m}^{(k)}\, z dz$$

$$\Phi_{\theta m}^{(k)} = M_{\theta m}^{(k)} - \delta_{k-1}T_{\theta m}^{(k)} + \sum_{n=1}^{N} \pi_{nk}T_{\theta m}^{(k)}, \quad T_{\theta m} = \sum_{k=1}^{N} T_{\theta m}^{(k)}$$

$$t_{\theta m}^{(k)} = d_m^{(k)}\gamma_\theta^{(k)} - \eta_m^{(k)}\theta \quad (m = 1, 2, 6), \quad d_1^{(k)} = k_1 b_{11}^{(k)} + k_2 b_{12}^{(k)}$$

$$d_2^{(k)} = k_1 b_{12}^{(k)} + k_2 b_{22}^{(k)}, \quad d_6^{(k)} = k_1 b_{16}^{(k)} + k_2 b_{26}^{(k)}$$

Введем далее поперечные касательные напряжения (2.3) в интегральные соотношения упругости (2.6) и исключая функции $\mu_i^{(k)}$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно межслойных касательных напряжений

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{V} \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{U} = \|\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \ldots, \tau_1^{(N-1)}, \tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}, \ldots, \tau_2^{(N-1)}\|^T$$

$$g_{mn} = -3\,(h_m a_{55}^{(m)} + h_{m+1} a_{55}^{(m+1)}), \quad g_{N-1+m,\,N-1+m} = -3\,(h_m a_{44}^{(m)} + h_{m+1} a_{44}^{(m+1)})$$

$$g_{m,\,N-1+m} = g_{N-1+m,\,m} = -3\,(h_m a_{45}^{(m)} + h_{m+1} a_{45}^{(m+1)})$$

$$g_{n,\,n+1} = g_{n+1,\,n} = h_{n+1} a_{55}^{(n+1)}, \quad g_{N-1+n,\,N+n} = g_{N+n,\,N-1+n} = h_{n+1} a_{44}^{(n+1)}$$

$$g_{n,\,N+n} = g_{N+n,\,n} = g_{n+1,\,N-1+n} = g_{N-1+n,\,n+1} = h_{n+1} a_{45}^{(n+1)}$$

$$v_m = -2\,(h_m \varepsilon_{13}^{(m)} + h_{m+1} \varepsilon_{13}^{(m+1)}) - \delta_{1m} h_1 (a_{55}^{(1)} p_1^- + a_{45}^{(1)} p_2^-) -$$

$$- \delta_{N-1,\,m} h_N (a_{55}^{(N)} p_1^+ + a_{45}^{(N)} p_2^+) - 10\,(h_m \varkappa_5^{(m)} + h_{m+1} \varkappa_5^{(m+1)}) + 12\,(h_m \omega_5^{(m)} + h_{m+1} \overline{\omega}_5^{(m+1)})$$

$$v_{N-1+m} = -2\,(h_m \varepsilon_{23}^{(m)} + h_{m+1} \varepsilon_{23}^{(m+1)}) - \delta_{1m} h_1 (a_{45}^{(1)} p_1^- + a_{44}^{(1)} p_2^-) -$$

$$- \delta_{N-1,\,m} h_N (a_{45}^{(N)} p_1^+ + a_{44}^{(N)} p_2^+) - 10\,(h_m \varkappa_4^{(m)} + h_{m+1} \varkappa_4^{(m+1)}) + 12\,(h_m \omega_4^{(m)} + h_{m+1} \overline{\omega}_4^{(m+1)})$$

$$\omega_4^{(m)} = \frac{2}{h_m} \alpha_4^{(m)} \int_{\delta_{m-1}}^{\delta_m} \theta M_m(z)\,dz, \quad \overline{\omega}_4^{(m+1)} = \frac{2}{h_{m+1}} \alpha_4^{(m+1)} \int_{\delta_m}^{\delta_{m+1}} \theta \overline{M}_{m+1}(z)\,dz$$

$$\varkappa_4^{(k)} = \alpha_4^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \theta f_k(z)\,dz \quad (4 \rightleftarrows 5)$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$; $m = 1, 2, \ldots, N-1$; $n = 1, 2, \ldots, N-2$, а неопределенные в (3.5) элементы матрицы $\mathbf{G}$ считаются нулевыми.

Решим систему уравнений (3.5), выразив межслойные напряжения $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \ldots, \tau_i^{(N-1)}$ через обобщенные перемещения u_i, w, $\beta_i^{(k)}$. Тогда из интегральных соотношений упругости (2.6) получим

$$\mu_1^{(k)} = q_{44}^{(k)} (\varepsilon_{13}^{(k)} - \varkappa_5^{(k)}) - q_{45}^{(k)} (\varepsilon_{23}^{(k)} - \varkappa_4^{(k)}) - 5/12\, h_k (\tau_1^{(k-1)} + \tau_1^{(k)}) \quad (1 \rightleftarrows 2;\ 4 \rightleftarrows 5) \qquad (3.6)$$

где $q_{mn}^{(k)}$ — коэффициенты поперечного сдвига

$$q_{mn}^{(k)} = \frac{5}{6} \frac{h_k a_{mn}^{(k)}}{a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2} \quad (m, n = 4, 5)$$

Как видим, интегральные соотношения упругости (2.6) играют принципиально важную роль в рассматриваемом варианте теории термоупругих многослойных оболочек, являясь связующим звеном между независимыми кинематическими (2.1), (2.2) и статическими (2.3) гипотезами, так как именно с их помощью удается найти зависимость между лишними функциями $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \ldots, \tau_i^{(N-1)}$, $\mu_i^{(1)}, \mu_i^2, \ldots, \mu_i^{(N)}$, введенными в (2.3), и обобщенными перемещениями u_i, w, $\beta_i^{(k)}$.

Подставив поперечные касательные напряжения (2.3) в формулу для поперечных усилий (3.2) и интегрируя с учетом соотношений (3.6), находим

$$Q_1^{(k)} = q_{44}^{(k)} (\varepsilon_{13}^{(k)} - \varkappa_5^{(k)}) - q_{45}^{(k)} (\varepsilon_{23}^{(k)} - \varkappa_4^{(k)}) + 1/12\, h_k (\tau_1^{(k-1)} + \tau_1^{(k)})$$

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{N} Q_1^{(k)} \quad (1 \rightleftarrows 2,\ 4 \rightleftarrows 5)$$

В заключение приведем формулы для вычисления поперечных нормальных напряжений. Пренебрегая в формулах (2.16), (2.17) членами $k_i z$ по сравнению с единицей и интегрируя по координате z с учетом соотношений упругости (3.3), статической гипотезы (2.3) и деформационных соотношений (3.1), получим

$$\sigma_{33}^{(k)} = q^- - \frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial (A_2N_1^{(k)}[z])}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial (A_1N_2^{(k)}[z])}{\partial\alpha_2}\right) + k_1T_{11}^{(k)}[z] + k_2T_{22}^{(k)}[z]$$

$$N_1^{(k)}[z] = Q_1^{(k)}[z] - \theta_1T_{11}^{(k)}[z] - \theta_2T_{12}^{(k)}[z]$$

$$Q_1^{(k)}[z] = \sum_{r=1}^{k-1} Q_1^{(r)} + h_kM_k(z)\,[1 - \frac{1}{2}M_k(z)]\,\tau_1^{(k-1)} +$$

$$+ 1/2\,h_kM_k^2(z)\,\tau_1^{(k)} + M_k^2(z)\,[3 - 2M_k(z)]\,\mu_1^{(k)} \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

$$\left\|\begin{matrix} T_{11}^{(k)}[z] \\ T_{22}^{(k)}[z] \\ T_{12}^{(k)}[z] \end{matrix}\right\| = \mathrm{A}^{(k)}[z]\left\|\begin{matrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{matrix}\right\| + \sum_{n=1}^{N}\mathrm{D}^{(kn)}[z]\left\|\begin{matrix} K_{11}^{(n)} \\ K_{22}^{(n)} \\ K_{12}^{(n)} \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} T_{\theta 1}^{(k)}[z] \\ T_{\theta 2}^{(k)}[z] \\ T_{\theta 6}^{(k)}[z] \end{matrix}\right\|$$

$$\mathrm{A}^{(k)}[z] = \sum_{r=1}^{k-1} h_r\mathrm{b}^{(r)} + (z - \delta_{k-1})\,\mathrm{b}^{(k)}$$

$$\mathrm{D}^{(kn)}[z] = \sum_{r=1}^{k-1} (\pi_{rn} + \frac{1}{2}\,\delta_{rn}h_r)\,h_r\mathrm{b}^{(r)} + [\pi_{kn} + \frac{1}{2}\,\delta_{kn}(z - \delta_{k-1})]\,(z - \delta_{k-1})\,\mathrm{b}^{(k)}$$

$$T_{\theta m}^{(k)}[z] = \sum_{n=1}^{k-1} T_{\theta m}^{(n)} + \int_{\delta_{k-1}}^{z} t_{\theta m}^{(k)}dz \quad (m = 1, 2, 6)$$

Таким образом, непротиворечивый с точки зрения смешанного вариационного принципа геометрически нелинейный вариант теории термоупругих тонких многослойных анизотропных оболочек с учетом локальных эффектов, позволяющий рассмотреть достаточно общий случай температурного и силового нагружений (включая тангенциальное), построен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я.* Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композитных материалов. 1988. № 4. С. 684—690.
2. *Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Исследование пространственных эффектов в задачах о термонапряженном состоянии анизотропных оболочек // Механика композитных материалов. 1989. № 3. С. 487—493.
3. *Куликов Г. М., Мищенко С. В.* Термосиловое нагружение многослойных анизотропных оболочек // Механика композитных материалов. 1993. № 2. С. 191—202.
4. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 3—17.
5. *Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 15. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3—68.
6. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. 1988. № 2. С. 287—298.
7. *Noor A. K., Burton W. S.* Assessment of computational models for multilayered composite shells // Appl. Mech. Rev. 1990. Vol. 23. No. 4. P. 67—97.
8. *Григолюк Э. И.* Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 1. С. 26—34.

9. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 68—80.
10. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1077—1079.
11. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
12. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 336 с.
15. *Куликов Г. М.* Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов // ПМТФ. 1988. № 5. С. 157—162.