УДК 539.3

К ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОГО ПРОГИБА

Г. М. КУЛИКОВ

(Тамбов)

Теория многослойных оболочек конечного прогиба сформулирована в [1, 2]. Для каждого слоя оболочки принимается справедливой гипотеза прямой линии. Этот подход является наиболее общим, так как поперечные сдвиги описываются функциями, произвольными для каждого слоя, однако порядок уравнений зависит от числа слоев.

Теории, основанные на гипотезах, привлекаемых для всего пакета слоев в целом, рассматривались в [3, 4]. Общим для этих работ является то, что деформации поперечного сдвига аппроксимируются двумя функциями. Более подробно обсуждаемые вопросы рассматриваются в [5].

Здесь учет деформаций поперечного сдвига осуществляется с помощью $2r$ функций постоянных для всего пакета слоев. Частный вариант предложенной теории ($r=1$) особенно прост и выразителен. Для этого случая получена система трех дифференциальных уравнений относительно силовой функции F, функции перемещений χ и функции сдвига φ^1. Общий порядок системы в отличие от [3, 6] равен двенадцати. Уравнения отличаются лишь постоянными коэффициентами от уравнений трехслойных оболочек, полученных в [7].

1. Рассмотрим многослойную пологую оболочку, составленную из s трансверсально-изотропных слоев. Будем пренебрегать поперечным обжатием слоев. За исходную поверхность примем внутреннюю граничную поверхность, которую отнесем к декартовым координатам x_1, x_2. Координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности.

Пусть h_k – толщина k-го слоя; h – толщина оболочки; δ_k – расстояние от исходной поверхности до конца k-го слоя ($\delta_0=0$); E_k, ν_k, G_k – модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль поперечного сдвига k-го слоя; k_{ij} – кривизны и кручение координатных линий; u_i, w – тангенциальные и нормальное перемещения точек исходной поверхности; u_i^k – тангенциальные перемещения точек k-го слоя; α_i^p – функции, характеризующие поперечный сдвиг; $f_p'(z)$ – известные функции (штрих обозначает дифференцирование по z); δ_{ij} – символ Кронеккера. Здесь и в дальнейшем $i, j=1, 2$; $k=1, 2, \ldots, s$; $p, q=1, 2, \ldots, r$; $m=0, 1, \ldots, r$.

Следуя [7], введем приведенный коэффициент Пуассона ν, безразмерные толщины слоев t_k, безразмерные жесткостные характеристики γ_k, осредненный модуль упругости E, а также необходимые обозначения

$$\nu=\sum_{k=1}^{s}\frac{E_kh_k\nu_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{E_kh_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1},\qquad t_k=h_kh^{-1}$$

$$\gamma_k=\frac{E_kh_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{E_kh_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1},\qquad E=(1-\nu^2)h^{-1}\sum_{k=1}^{s}\frac{E_kh_k}{1-\nu_k^2}$$

$$\omega_k=\delta_kh^{-1},\qquad L_k^p=\sum_{n=1}^{k-1}(f_n^p-f_{n-1}^p)G_n^{-1}-f_{k-1}^pG_k^{-1},\qquad f_n^p=f_p(\delta_n)h^{-1}\ {\scriptstyle (n=0,1,\ldots,s-1)}$$

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_p\,dz=\frac{1}{2}h^2\lambda_k^p,\qquad \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_pz\,dz=\frac{1}{12}h^3\pi_k^p,\qquad \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_p'f_q'\,dz=h\mu_k^{pq},$$

$$\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_p f_q\, dz = \frac{1}{12} h^3 \tau_k^{pq}$$

Далее в основном будем придерживаться обозначений работы [7]. Для k-го слоя оболочки примем допущение о распределении деформаций поперечного сдвига в виде

$$\varepsilon_{iz}^k = G_k^{-1} \sum_{p=1}^{r} \alpha_i^p f_p' \tag{1.1}$$

Предположим, что слои оболочки работают совместно без скольжения и оболочка нагружена нормально приложенной поверхностной нагрузкой, следовательно, условия контакта и граничные условия на внешних поверхностях можно записать следующим образом:

$$\overset{n+1}{u_i}(\delta_n) = u_i^n(\delta_n), \quad \overset{n+1}{\sigma_{iz}}(\delta_n) = \sigma_{iz}^n(\delta_n) \quad {\scriptstyle (n=1,2,\ldots,s-1)}, \quad \sigma_{iz}^1(0) = 0, \quad \sigma_{iz}^s(h) = 0$$

Для выполнения последних двух условий достаточно положить $f_p'(0)=0$, $f_p'(h)=0$. Интегрируя (1.1) по толщине слоев, найдем тангенциальные перемещения k-го слоя оболочки

$$u_i^k = u_i - \delta_{k-1} w_{,i} - (z-\delta_{k-1}) w_{,i} + \sum_{p=1}^{r} (hL_k^p + G_k^{-1} f_p)\alpha_i^p \tag{1.2}$$

Дифференцирование по координате x_i обозначено нижним индексом после запятой.

Деформации слоев определяются формулами

$$\varepsilon_{ij}^k = e_{ij} + \delta_{k-1}\varkappa_{ij} + (z-\delta_{k-1})\varkappa_{ij} + \sum_{p=1}^{r} (hL_k^p + G_k^{-1} f_p)\alpha_{ij}^p$$

$$e_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i} w_{,j}) + k_{ij} w, \qquad \alpha_{ij}^p = {}^1/_2(\overset{p}{\alpha}_{i,j} + \overset{p}{\alpha}_{j,i}), \qquad \varkappa_{ij} = -w_{,ij}$$

Исходя из закона Гука, напряжения в слоях можно записать в виде

$$\sigma_{ij}^k = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} \left[(1-\nu)\varepsilon_{ij}^k + \nu\delta_{ij}(\varepsilon_{11}^k + \varepsilon_{22}^k) \right], \qquad \sigma_{iz}^k = G_k \varepsilon_{iz}^k$$

Используя принцип возможных перемещений и следуя [7], получим $2r+3$ уравнений равновесия многослойных пологих оболочек конечного прогиба

$$N_{1i,1} + N_{2i,2} = 0, \qquad \overset{q}{H}_{1i,1} + \overset{q}{H}_{2i,2} = Q_i^q$$

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - N_{11}(k_{11}+\varkappa_{11}) - 2N_{12}(k_{12}+\varkappa_{12}) - N_{22}(k_{22}+\varkappa_{22}) + q_0 = 0$$

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{s} N_{ij}^k, \qquad M_{ij} = \sum_{k=1}^{s} (\delta_{k-1} N_{ij}^k + M_{ij}^k), \qquad Q_i^q = \sum_{k=1}^{s} G_k^{-1} Q_i^{qk},$$

$$H_{ij}^q = \sum_{k=1}^{s} (hL_k^q N_{ij}^k + G_k^{-1} H_{ij}^{qk})$$

$$N_{ij}^k = \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^k\, dz, \qquad M_{ij}^k = \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^k (z-\delta_{k-1})\, dz, \qquad H_{ij}^{qk} = \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^k f_q\, dz,$$

$$Q_i^{qk} = \int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{iz}^k f_q'\, dz$$

2. Приступим к выводу разрешающих уравнений. Для этого усилия и моменты запишем в виде

$$N_{ij}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\Lambda e_{ij}^\circ,\qquad Q_i^q=h\sum_{p=1}^{r}\eta_4^{pq}\alpha_i^p \tag{2.1}$$

$$M_{ij}=\frac{1}{2}hc_{13}N_{ij}+D_1\left(\eta_3\Lambda\varkappa_{ij}+\sum_{p=1}^{r}\eta_2^p\Lambda\alpha_{ij}^p\right)$$

$$H_{ij}^q=\frac{1}{2}hc_{12}^qN_{ij}+D_1\left(\eta_2^q\Lambda\varkappa_{ij}+\sum_{p=1}^{r}\eta_1^{qp}\Lambda\alpha_{ij}^p\right)$$

$$\Lambda b_{ij}=(1-\nu)\,b_{ij}+\nu\delta_{ij}(b_{11}+b_{22}),\qquad D_1=Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}$$

$$e_{ij}^\circ=\frac{1}{2}(\overset{\circ}{u}_{i,j}+\overset{\circ}{u}_{j,i}+w_{,i}w_{,j})+k_{ij}w,\qquad u_i^\circ=u_i-\frac{1}{2}h\left(c_{13}w_{,i}-\sum_{p=1}^{r}c_{12}^p\alpha_i^p\right)$$

$$c_{12}^p=\sum_{k=1}^{s}(2L_k^p+\lambda_k^pt_k^{-1}G_k^{-1})\gamma_k,\qquad c_{13}=\sum_{k=1}^{s}(\omega_k+\omega_{k-1})\gamma_k$$

$$\eta_1^{pq}=\sum_{k=1}^{s}[\gamma_k\tau_k^{pq}t_k^{-1}G_k^{-2}+6(\lambda_k^qL_k^p+\lambda_k^pL_k^q)\gamma_kt_k^{-1}G_k^{-1}+12\gamma_kL_k^pL_k^q]-3c_{12}^pc_{12}^q$$

$$\eta_4^{pq}=\sum_{k=1}^{s}\mu_k^{pq}G_k^{-1},\qquad \eta_2^p=\sum_{k=1}^{s}[\gamma_k\pi_k^pt_k^{-1}G_k^{-1}+6(\omega_k+\omega_{k-1})\gamma_kL_k^p]-3c_{12}^pc_{13}$$

$$\eta_3=4\sum_{k=1}^{s}(t_k^2+3\omega_k\omega_{k-1})\gamma_k-3c_{13}^2$$

Вводя аналогично [2] функции F, φ^p, a^p, получим систему разрешающих уравнений, из них r уравнений описывают сдвиговой краевой эффект

$$\nabla^2\nabla^2F=Eh(k_{11}w_{,22}-2k_{12}w_{,12}+k_{22}w_{,11}+w_{,12}^2-w_{,11}w_{,22}) \tag{2.2}$$

$$D_1\sum_{p=1}^{r}\nabla^2(\eta_1^{pq}a^p-r^{-1}\eta_2^qw)=h\sum_{p=1}^{r}\eta_4^{pq}a^p \tag{2.3}$$

$$\frac{1-\nu}{2}D_1\sum_{p=1}^{r}\eta_1^{pq}\nabla^2\varphi^p=h\sum_{p=1}^{r}\eta_4^{pq}\varphi^p \tag{2.4}$$

$$D_1\sum_{p=1}\nabla^2\nabla^2(\eta_2^pa^p-r^{-1}\eta_3w)-F_{,22}(k_{11}-w_{,11})+2F_{,12}(k_{12}-w_{,12})-F_{,11}(k_{22}-w_{,22})=-q_0 \tag{2.5}$$

$$N_{ij}=\delta_{ij}\nabla^2F-F_{,ij},\qquad \alpha_1^p=a_{,1}^p+\varphi_{,2}^p,\qquad \alpha_2^p=a_{,2}^p-\varphi_{,1}^p$$

где ∇^2 обозначает оператор Лапласа.

Дальнейшее упрощение уравнений (2.2)–(2.5) возможно, если ввести функцию перемещений χ по следующим формулам:

$$w=\sum_{m=0}^{r}b_m^\circ\underbrace{\nabla^2\ldots\nabla^2}_{m}\chi,\qquad a^p=\sum_{m=0}^{r}b_m^p\underbrace{\nabla^2\ldots\nabla^2}_{m}\chi \tag{2.6}$$

Внося (2.6) в (2.3) и считая, что полученные уравнения тождественно удовлетворяются, найдем для определения коэффициентов $b_m{}^\circ$, $b_m{}^p$ систему линейных алгебраических уравнений.

При построении теории пологих многослойных оболочек малого прогиба уравнение (2.2) можно тождественно удовлетворить, если положим

$$\chi = \nabla^2\nabla^2\Phi, \quad F = Eh\Omega\sum_{m=0}^{r} b_m{}^\circ \underbrace{\nabla^2\ldots\nabla^2}_{m}\Phi \tag{2.7}$$

Подставляя в уравнение (2.5) w, a^p по формулам (2.6) и далее χ, F по формулам (2.7), получим уравнение порядка $2r+8$ относительно функции Φ:

$$D\sum_{m=0}^{r}\sum_{p=1}^{r}\theta_m{}^p\underbrace{\nabla^2\ldots\nabla^2}_{m+4}\Phi + Eh\Omega\Omega\sum_{m=0}^{r} b_m{}^\circ\underbrace{\nabla\ldots\nabla^2}_{m}\Phi = q_0 \tag{2.8}$$

$$\Omega = k_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} - 2k_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} + k_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}, \quad D=D_1\eta_3, \quad \theta_m{}^p=r^{-1}b_m{}^\circ-\eta_2{}^p\eta_3{}^{-1}b_m{}^p$$

где D – жесткость оболочки соответствующая поверхности, расположенной на расстоянии $^1/_2hc_{13}$ от исходной поверхности.

Система уравнений (2.4), (2.8) является разрешающей, так как через функции φ^p, Φ выражаются все функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние оболочки.

Заметим, что уравнения (2.4) не связаны с уравнением (2.8) и имеют решения типа краевого эффекта. Этот факт позволяет приближенно полагать $\varphi^p=0$ и таким образом снижать порядок разрешающих уравнений на $2r$.

Структура граничных условий существенно не отличается от [7], поэтому в данной работе они не приводятся. Отметим лишь, что в общем случае имеем $4r+8$ граничных условий, что соответствует порядку разрешающих уравнений.

3. Особенно наглядный вид приобретают уравнения (2.2) – (2.5), если предположить, что учет деформаций поперечного сдвига осуществляется с помощью двух функций $\alpha_1{}^1$, $\alpha_2{}^1$. Тогда из (2.6) следуют формулы

$$w = \left(1-\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\right)\chi, \quad a^1 = -\frac{\eta_2{}^1}{\eta_1{}^{11}}\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\chi, \quad \beta = \frac{12(1-\nu^2)}{E}\frac{\eta_4{}^{11}}{\eta_1{}^{11}}$$

Уравнение совместности деформаций не меняется, другие приводятся к виду

$$D\left(1-\frac{\theta h^2}{\beta}\nabla^2\right)\nabla^2\nabla^2\chi + F_{,22}(k_{11}-w_{,11}) - 2F_{,12}(k_{12}-w_{,12}) + F_{,11}(k_{22}-w_{,22}) = q_0$$
$$\frac{1-\nu}{2}\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\varphi^1 = \varphi^1, \qquad \theta = 1-(\eta_2{}^1)^2(\eta_1{}^{11}\eta_3)^{-1} \tag{3.1}$$

Уравнения (2.2), (3.1) и граничные условия совпадают соответственно с разрешающими уравнениями и граничными условиями трехслойных оболочек [7]. Таким образом, можно утверждать следующее: решенные задачи устойчивости и колебаний трехслойных оболочек [7] могут быть с успехом применены при расчете многослойных оболочек.

В заключение заметим, что уравнения (2.2), (3.1) допускают предельные переходы. Формально положив параметр $\theta=0$, получим разрешающие уравнения из [3]. Принимая $G_k=\infty$, можно получить уравнения многослойных оболочек, для которых справедлива гипотеза недеформируемой нормали, принятая для всего пакета слоев.

Поступила 6 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5.
2. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.

3. *Прусаков А. П.* Конечные прогибы многослойных пологих оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
4. *Рассказов А. О.* К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. Прикл. механ., 1976, т. 12, вып. 11.
5. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
6. *Рябов А. Ф.* Розрахунок багатошарових оболонок. Київ, «Будівельник», 1968.
7. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек. Новосибирск. Западно-Сибирск. книжн. изд-во, 1966.