

*Г. М. Куликов\*, С. В. Плотникова*

*Тамбовский государственный технический университет, Россия*

**РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ  
КОЛЕБАНИЯХ МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОТСЧЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

*G. M. Kulikov\* and S. V. Plotnikova*

**THREE-DIMENSIONAL SOLUTION OF THE FREE VIBRATION PROBLEM  
FOR METAL-CERAMIC SHELLS USING THE METHOD OF SAMPLING  
SURFACES**

**Keywords:** metal-ceramic shell, elasticity theory, free vibrations, method of sampling surfaces

The possibility of using the method of sampling surfaces (SaS) for solving the free vibration problem of three-dimensional elasticity for metal-ceramic shells is studied. According to this method, in the shell body, an arbitrary number of SaS parallel to its middle surface are selected in order to take displacements of these surfaces as unknowns. The SaS pass through the nodes of a Chebyshev polynomial, which improves the convergence of the SaS method significantly. As a result, the SaS method can be used to obtain analytical solutions of the vibration problem for metal-ceramic plates and cylindrical shells that asymptotically approach the exact solutions of elasticity as the number of SaS tends to infinity.

**Ключевые слова:** оболочка металлокерамическая, теория упругости, колебания свободные, метод отсчетных поверхностей

Изучена возможность использования метода отсчетных поверхностей для решения трехмерной задачи теории упругости о свободных колебаниях металлокерамических оболочек. Согласно этому методу внутри тела оболочки выбирается произвольное число отсчетных поверхностей, параллельных срединной поверх-

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: gmkulikov@mail.ru  
Corresponding author: gmkulikov@mail.ru

ности, с целью введения перемещений этих поверхностей в качестве искоемых функций. Отсчетные поверхности располагаются внутри оболочки в узлах полинома Чебышёва, что существенно улучшает сходимость метода. В результате метод отсчетных поверхностей может быть применен к получению аналитических решений задачи о колебаниях металлокерамических пластин и цилиндрических оболочек, которые асимптотически приближаются к точным решениям упругости при стремлении числа отсчетных поверхностей к бесконечности.

## Введение

В литературе известно несколько подходов к нахождению аналитических решений статических и динамических задач теории упругости для композитных пластин и оболочек из функциональных материалов: первый основан на применении асимптотических методов [1—3], второй связан с использованием степенных рядов в пространственных аппроксимациях искоемых функций и упругих постоянных [4, 5], третий основан на методе пространства состояний [6, 7]. Отметим, что последний подход обеспечивает точное решение пространственной задачи теории упругости лишь в случае распределения механических характеристик материала по толщине пластины согласно экспоненциальному закону. Современное состояние проблемы было обсуждено в обзорах [8—10].

В данной работе для решения пространственной задачи о свободных поперечных колебаниях оболочки из функционального материала применен метод отсчетных поверхностей [11—13], согласно которому в теле оболочки выбираются  $N$  отсчетных поверхностей  $\Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^N$ , параллельных срединной поверхности, с целью использования векторов перемещений  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^N$  этих поверхностей в качестве искоемых функций. Такой выбор искоемых функций с последующим применением полиномов Лагранжа степени  $N-1$  в пространственных аппроксимациях перемещений и механических характеристик материала позволяет представить разрешающие уравнения предложенной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и построить деформационные соотношения, которые точно представляют перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат [14].

Теория оболочек высокого порядка [11—13] основана на использовании эквидистантных отсчетных поверхностей, при этом лицевые поверхности оболочки выбираются в качестве отсчетных. Это ограничивает использование данной теории при расчете толстых оболочек. Дело в том, что предложенная пространственная полиномиальная интерполяция

перемещений с применением полиномов Лагранжа высокой степени может приводить вследствие феномена Рунге к значительной осцилляции полиномиальных аппроксимаций в зоне краевого эффекта. С возрастанием степени полинома погрешность интерполяции может стремиться к бесконечности. В численном анализе для борьбы с указанным явлением в качестве узлов интерполяции принято использовать корни многочлена Чебышёва [15], что помогает существенно улучшить поведение полиномиальных аппроксимаций высокой степени, для которых ошибка интерполяции равномерно стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Это дает возможность находить решение трехмерных задач статики для композитных прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек из функциональных материалов [16—19] с любой наперед заданной точностью, поскольку полученные аналитические решения асимптотически приближаются к точным решениям пространственной теории упругости.

### Кинематика оболочки и деформационные соотношения

Рассмотрим оболочку постоянной толщины  $h$ . Отнесем срединную поверхность  $\Omega$  к криволинейным ортогональным координатам  $\theta_1, \theta_2$ , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн, а координату  $\theta_3$  будем отсчитывать в поперечном направлении. Пусть  $\mathbf{e}_\alpha$  — единичные векторы касательных к координатным линиям  $\theta_\alpha$ ;  $\mathbf{e}_3$  — единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности;  $A_\alpha$  — коэффициенты первой квадратичной формы;  $k_\alpha$  — главные кривизны;  $c_\alpha = 1 + k_\alpha \theta_3$  — компоненты геометрического тензора сдвига;  $c_\alpha^I = c_\alpha(\theta_3^I) = 1 + k_\alpha \theta_3^I$  — компоненты геометрического тензора сдвига на отсчетных поверхностях  $\Omega^I$  (рис. 1);

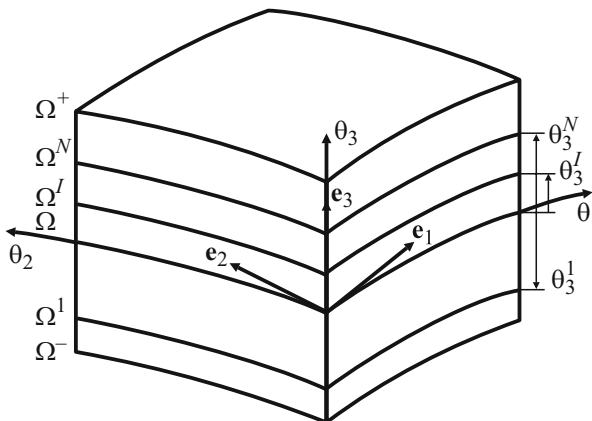


Рис. 1. Схема расположения отсчетных поверхностей в оболочке.

$u_i$  — компоненты вектора перемещений в базисе  $\mathbf{e}_i$ ;  $u_i^I = u_i(\theta_3^I)$  — перемещения отсчетных поверхностей;  $\theta_3^I$  — поперечные координаты поверхностей  $\Omega^I$ , которые располагаются внутри интервала  $(-h/2, h/2)$  в узлах полинома Чебышёва степени  $N$  и определяются по формуле [15]

$$\theta_3^I = -\frac{h}{2} \cos\left(\pi \frac{2I-1}{2N}\right). \quad (1)$$

Здесь и далее индексы  $I, J, K$  указывают на принадлежность некоторой величины к отсчетной поверхности и принимают значения  $1, 2, \dots, N$ ; греческие индексы  $\alpha, \beta = 1, 2$ ; латинские индексы  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Отметим, что в работе применено соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам.

Компоненты тензора деформаций на отсчетных поверхностях  $\varepsilon_{ij}^I = \varepsilon_{ij}(\theta_3^I)$  представим как [18]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{c_\beta^I} \lambda_{\alpha\beta}^I + \frac{1}{c_\alpha^I} \lambda_{\beta\alpha}^I, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \beta_\alpha^I + \frac{1}{c_\alpha^I} \lambda_{3\alpha}^I, \quad \varepsilon_{33}^I = \beta_3^I, \quad (2)$$

$$\beta_i^I = u_{i,3}(\theta_3^I), \quad (3)$$

где  $\beta_i^I$  — значения производной перемещений по координате  $\theta_3$  на отсчетных поверхностях;  $\lambda_{i\alpha}^I$  — деформационные параметры отсчетных поверхностей [18]:

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\alpha}^I &= \frac{1}{A_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^I + B_\alpha u_\beta^I + k_\alpha u_3^I, & \lambda_{\beta\alpha}^I &= \frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha}^I - B_\alpha u_\alpha^I \quad (\beta \neq \alpha), \\ \lambda_{3\alpha}^I &= \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^I - k_\alpha u_\alpha^I, & B_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta} \quad (\beta \neq \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

До этого момента не было сделано никаких предположений о характере распределения полей перемещений и деформаций по толщине оболочки. Теперь предположим, что перемещения и деформации распределены в поперечном направлении согласно закону [14]

$$u_i = \sum_I L^I u_i^I, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \sum_I L^I \varepsilon_{ij}^I, \quad (6)$$

где  $L^I(\theta_3)$  — полиномы Лагранжа степени  $N-1$ , определяемые по формуле

$$L^I = \prod_{J \neq I} \frac{\theta_3 - \theta_3^J}{\theta_3^I - \theta_3^J}. \quad (7)$$

Из соотношений (3), (5) следует, что

$$\beta_i^I = \sum_J M^J(\theta_3^I) u_i^J, \quad (8)$$

где  $M^J = L_{,3}^J$  — полиномы степени  $N-2$ ; их значения на отсчетных поверхностях  $\Omega^I$  находим по формулам

$$M^J(\theta_3^I) = \frac{1}{\theta_3^J - \theta_3^I} \prod_{K \neq I, J} \frac{\theta_3^I - \theta_3^K}{\theta_3^J - \theta_3^K} \quad (J \neq I), \quad (9)$$

$$M^I(\theta_3^I) = - \sum_{J \neq I} M^J(\theta_3^I).$$

Как видим, определяющие функции данной теории оболочек высокого порядка  $\beta_i^I$  представлены согласно (8) в виде линейной комбинации перемещений отсчетных поверхностей  $u_i^J$ .

Отметим, что деформационные соотношения (2) с учетом (4), (8) точно представляют перемещение оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат. Доказательство этого фундаментального утверждения представлено в работе [14].

### Вариационная формулировка задачи

Вспользуемся принципом Гамильтона, который в случае свободных колебаний оболочки при отсутствии внешних нагрузок на лицевых поверхностях можно представить в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (10)$$

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} A_1 A_2 c_1 c_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i A_1 A_2 c_1 c_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \quad (12)$$

где  $U$  — внутренняя энергия оболочки;  $T$  — кинетическая энергия;  $\sigma_{ij}$  — напряжения;  $\rho$  — удельная плотность;  $\dot{u}_i$  — производная перемещений по времени  $t$ .

Подставив распределение деформаций по толщине оболочки (6) в функционал (11) и введя результирующие напряжения

$$H_{ij}^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} L^I c_1 c_2 d\theta_3, \quad (13)$$

получим

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_I H_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2. \quad (14)$$

Ограничимся рассмотрением линейно-упругих материалов, для которых применимы соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (15)$$

где  $C_{ijkl}$  — упругие модули оболочки.

Следующий шаг заключается в выборе закона распределения механических характеристик по толщине оболочки. Очевидно, что их распределение в поперечном направлении должно быть согласовано с распределением перемещений и деформаций (5), (6), т. е. имеем

$$C_{ijkl} = \sum_I L^I C_{ijkl}^I, \quad (16)$$

$$\rho = \sum_I L^I \rho^I, \quad (17)$$

где  $C_{ijkl}^I = C_{ijkl}(\theta_3^I)$  и  $\rho^I = \rho(\theta_3^I)$  — значения упругих модулей и плотности материала на отсчетных поверхностях.

Введя напряжения (15) в соотношения (13), (14) и учтя распределения деформаций и упругих постоянных по толщине оболочки (6), (16), получим выражение для внутренней энергии

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_I \sum_J \sum_K \Lambda^{IJK} \varepsilon_{ij}^I C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^K A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2, \quad (18)$$

где

$$\Lambda^{IJK} = \int_{-h/2}^{h/2} L^I L^J L^K c_1 c_2 d\theta_3. \quad (19)$$

Подставив далее распределения перемещений и плотности по толщине оболочки (5), (17) в (12), приходим к формуле для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_I \sum_J \sum_K \Lambda^{IJK} u_i^I \rho^J u_i^K A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2. \quad (20)$$

### Механические характеристики металлокерамического композита

Рассмотрим композит с металлической матрицей и случайно ориентированными дискретными керамическими включениями, выполняющими функции армирующих элементов. Для модулей упругости, модулей сдвига, коэффициентов Пуассона и плотности металла и керамики используем общепринятые обозначения:  $E_m$ ,  $G_m$ ,  $\nu_m$ ,  $\rho_m$  и  $E_c$ ,  $G_c$ ,  $\nu_c$ ,  $\rho_c$ .

Для описания механических характеристик металлокерамического композита могут быть использованы следующие три основные модели.

1. *Закон смеси.* В этой модели упругие постоянные и плотность определяются по формулам [9]

$$E = E_m V_m + E_c V_c, \quad \nu = \nu_m V_m + \nu_c V_c, \quad (21)$$

$$\rho = \rho_m V_m + \rho_c V_c. \quad (22)$$

Здесь  $V_m$ ,  $V_c$  — объемное содержание металла и керамики, изменяющееся по толщине оболочки согласно степенному закону [8]

$$V_m = 1 - V_c, \quad V_c = V_c^- + (V_c^+ - V_c^-)(h/2 + \theta_3)^{\gamma}, \quad (23)$$

где  $V_c^-$ ,  $V_c^+$  — объемное содержание керамики на лицевых поверхностях оболочки.

2. *Модель Мори—Танака.* Здесь для определения эффективных упругих модулей металлокерамического композита используют формулы [20, 21]

$$K = K_m + \frac{V_c(K_c - K_m)}{1 + V_m(K_c - K_m)/(K_m + 4G_m/3)},$$

$$G = G_m + \frac{V_c(G_c - G_m)}{1 + V_m(G_c - G_m)/(G_m + f_m)}, \quad f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)}, \quad (24)$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}, \quad K_c = \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)},$$

где  $K_m$ ,  $K_c$  — объемные модули упругости металла и керамики. Плотность материала может быть определена по закону смеси (22), (23).

3. *Самосогласованная модель Хилла.* Согласно этой модели эффективные упругие модули материала находят по формулам [22]. При этом вначале решают уравнение четвертой степени относительно модуля сдвига

$$\left( \frac{V_m K_m}{K_m + 4G/3} + \frac{V_c K_c}{K_c + 4G/3} \right) + 5 \left( \frac{V_m G_c}{G - G_c} + \frac{V_c G_m}{G - G_m} \right) + 2 = 0, \quad (25)$$

которое имеет только один положительный корень, затем вычисляют объемный модуль упругости

$$K = \left[ \frac{V_m}{K_m + 4G/3} + \frac{V_c}{K_c + 4G/3} \right]^{-1} - 4G/3. \quad (26)$$

Плотность материала также определяют по закону смеси (22), (23).

### Аналитическое решение задачи о свободных колебаниях цилиндрической оболочки

Рассмотрим свободные колебания металлокерамической шарнирно опертой цилиндрической панели радиусом  $R$  со сторонами  $a, b = \varphi R$ , где  $\varphi$  — центральный угол. Срединную поверхность оболочки отнесем к криволинейным координатам  $\theta_1, \theta_2$ , отсчитываемым в продольном и окружном направлениях.

Граничные условия для шарнирно опертой цилиндрической панели с шарнирно опертыми кромками имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{при} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_1 = a, \\ \sigma_{22} = u_1 = u_3 = 0 \quad \text{при} \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_2 = b. \end{aligned} \quad (27)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (27), решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1^I = u_{1rs}^I e^{i\omega_{rs}t} \cos \frac{r\pi\theta_1}{a} \sin \frac{s\pi\theta_2}{b}, \quad u_2^I = u_{2rs}^I e^{i\omega_{rs}t} \sin \frac{r\pi\theta_1}{a} \cos \frac{s\pi\theta_2}{b}, \\ u_3^I = u_{3rs}^I e^{i\omega_{rs}t} \sin \frac{r\pi\theta_1}{a} \sin \frac{s\pi\theta_2}{b}, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $r, s$  — количество полуволн в продольном и окружном направлениях;  $u_{irs}^I$  — амплитуды перемещений отсчетных поверхностей;  $\omega_{rs}$  — собственная частота;  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.



Введя перемещения (28) в соотношения (2), (4), (8), (18), (20) и используя принцип Гамильтона (10), приходим к однородной системе линейных уравнений порядка  $3N$

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial \mathbf{W}_{rs}} = 0, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{W}_{rs} = \left[ u_{1rs}^1 \ u_{1rs}^2 \ \dots \ u_{1rs}^N \ u_{2rs}^1 \ u_{2rs}^2 \ \dots \ u_{2rs}^N \ u_{3rs}^1 \ u_{3rs}^2 \ \dots \ u_{3rs}^N \right]^T. \quad (30)$$

Однородную систему уравнений (29) представим в матричной форме (соглашение о суммировании по повторяющимся индексам не применяется)

$$(\mathbf{K}_{rs} - \omega_{rs}^2 \mathbf{M}_{rs}) \mathbf{W}_{rs} = 0. \quad (31)$$

Как известно, система уравнений (31) имеет нетривиальное решение в случае

$$\det(\mathbf{K}_{rs} - \omega_{rs}^2 \mathbf{M}_{rs}) = 0, \quad (32)$$

где  $\mathbf{K}_{rs}$ ,  $\mathbf{M}_{rs}$  — матрица жесткости и матрица масс порядка  $3N \times 3N$ .

Решая полиномиальное уравнение (32), находим собственные частоты  $0 < \omega_{rs}^{(1)} < \omega_{rs}^{(2)} < \dots < \omega_{rs}^{(3N)}$ , расположенные в порядке возрастания. Собственные векторы  $\mathbf{W}_{rs}^{(q)}$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_{rs}^{(q)} = (\omega_{rs}^{(q)})^2$ , определяем путем решения однородной системы уравнений (31), где  $q = 1, 2, \dots, 3N$ .

Описанный алгоритм был реализован в среде программирования MATLAB с использованием пакета ToolBox Symbolic Math, позволяющего выполнять символьные вычисления. В результате получено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях металлокерамической цилиндрической панели на основе предложенной теории оболочек высокого порядка, которое асимптотически приближает точное решение пространственной теории упругости при стремлении числа отсчетных поверхностей к бесконечности.

### Численные результаты и их обсуждение

В качестве примера рассмотрим расчет металлокерамической цилиндрической панели с геометрическими параметрами  $a = b = 1$  м и  $h = 0,1$  м. Механические характеристики материала примем из работы [23]:  $E_m = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_m = 0,3$ ,  $\rho_m = 2707$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_c = 38 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_c = 0,3$ ,  $\rho_c = 3000$  кг/м<sup>3</sup>,  $V_c^- = 0$ ,  $V_c^+ = 1$ ; введем безразмерные величины  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{h \rho_m / D_m}$ ,  $\bar{u}_1 = u_1(0, b / 2s, z) a / hu_3^*$ ,  $\bar{u}_3 = u_3(a / 2r, b / 2s, z) / u_3^*$ ,

Табл. 1

Результаты расчета основной частоты  $\bar{\omega}_{11}^{(1)}$  металлокерамической цилиндрической оболочки

N	R/h = 5		R/h = 10		R/h = 100	
	$\gamma = 2$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 10$
3	48,5448196367	38,6626974059	34,7299559128	28,5340120780	27,3903742838	23,3961186465
7	48,5250135749	37,8411160800	34,6868917363	28,5678595952	27,3258370621	23,9835886220
11	48,5250115759	37,8402385577	34,6868869163	28,5675534143	27,3258291807	23,9833661714
15	48,5250115765	37,8402382052	34,6868869136	28,5675525827	27,3258291768	23,9833647787
19	48,5250115759	37,8402381975	34,6868869155	28,5675525618	27,3258291767	23,9833647458
23	48,5250115763	37,8402381950	34,6868869084	28,5675525635	27,3258291795	23,9833647453
[23]	48,5250	37,8401	34,6869	28,5673	27,3258	23,9832

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2r, b/2s, z)a^2 / E_m h u_3^*, \quad \bar{\sigma}_{12} = \sigma_{12}(0, 0, z)a^2 / E_m h u_3^*,$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13}(0, b/2s, z)a^3 / 10 E_m h^2 u_3^*, \quad \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}(a/2r, b/2s, z)a^4 / 10 E_m h^3 u_3^*,$$

$$u_3^* = u_3(a/2r, b/2s, 0), \quad D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu_m^2),$$

где  $z = \theta_3 / h$  — безразмерная поперечная координата.

Вначале проанализируем свободные колебания металлокерамической цилиндрической оболочки на основе простейшей модели смеси. Результаты расчета основной частоты  $\bar{\omega}_{11}^{(1)}$  при разных значениях  $R/h$  и показателя неоднородности  $\gamma$  представлены в табл. 1. Как видим, при надлежащем выборе отсчетных поверхностей можно добиться хорошего согласования расчетных данных с аналитическим решением [23], полученным методом Ритца путем удержания до 10 членов в разложениях перемещений в сте-

Табл. 2

Результаты расчета металлокерамической цилиндрической оболочки при  $R/h = 10, \gamma = 2, r = s = q = 1$

N	$\bar{u}_1(0,5)$	$\bar{\sigma}_{11}(-0,5)$	$\bar{\sigma}_{11}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{12}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{13}(0)$	$\bar{\sigma}_{33}(0)$
3	-1,676197780	-4,343370900	36,73051355	2,100743963	1,180502642	-2,499993522
7	-1,675026226	-6,018010121	38,72665137	1,200919408	1,544099953	-4,643783660
11	-1,675026063	-6,021347419	38,72348966	1,200720309	1,539701635	-4,619952481
15	-1,675026056	-6,021264744	38,72354703	1,200722212	1,539776696	-4,620346739
19	-1,675026056	-6,021261910	38,72353471	1,200722088	1,539774593	-4,620319637
23	-1,675026054	-6,021259966	38,72352990	1,200722061	1,539774228	-4,620311690

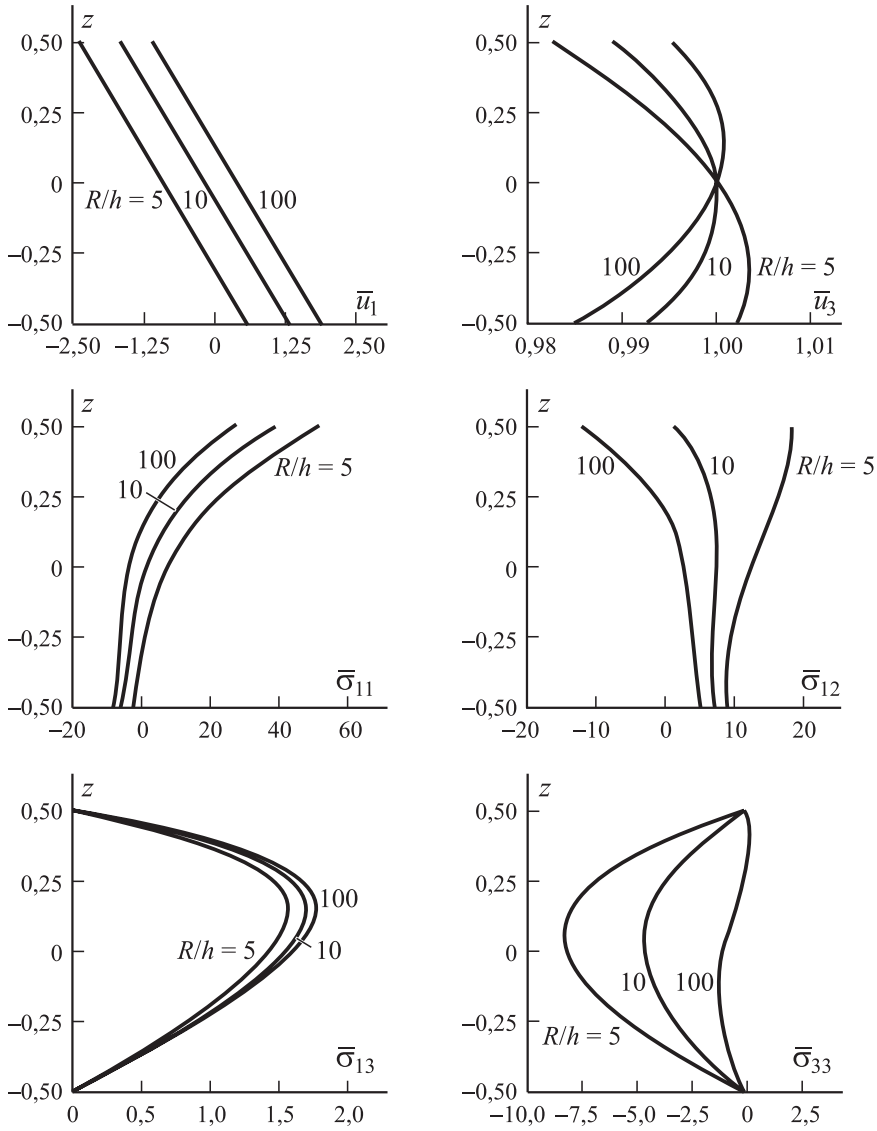


Рис. 2. Распределение перемещений и напряжений по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при  $N = 11$  и  $\gamma = 2$ ,  $r = s = 1$ ,  $q = 1$ ; значения собственных частот колебаний  $\bar{\omega}_{11}^{(1)}$  для выбранных значений  $R/h$  приведены в табл. 1.

пенные ряды по поперечной координате, что соответствует выбору 11 отсчетных поверхностей внутри тела оболочки. При этом выбор 13 отсчетных поверхностей обеспечивает от девяти до 11 правильных значащих цифр для основной частоты колебаний. Отметим также, что дальнейшее увеличение числа отсчетных поверхностей до 23 лишь незначительно увеличивает точность расчета.

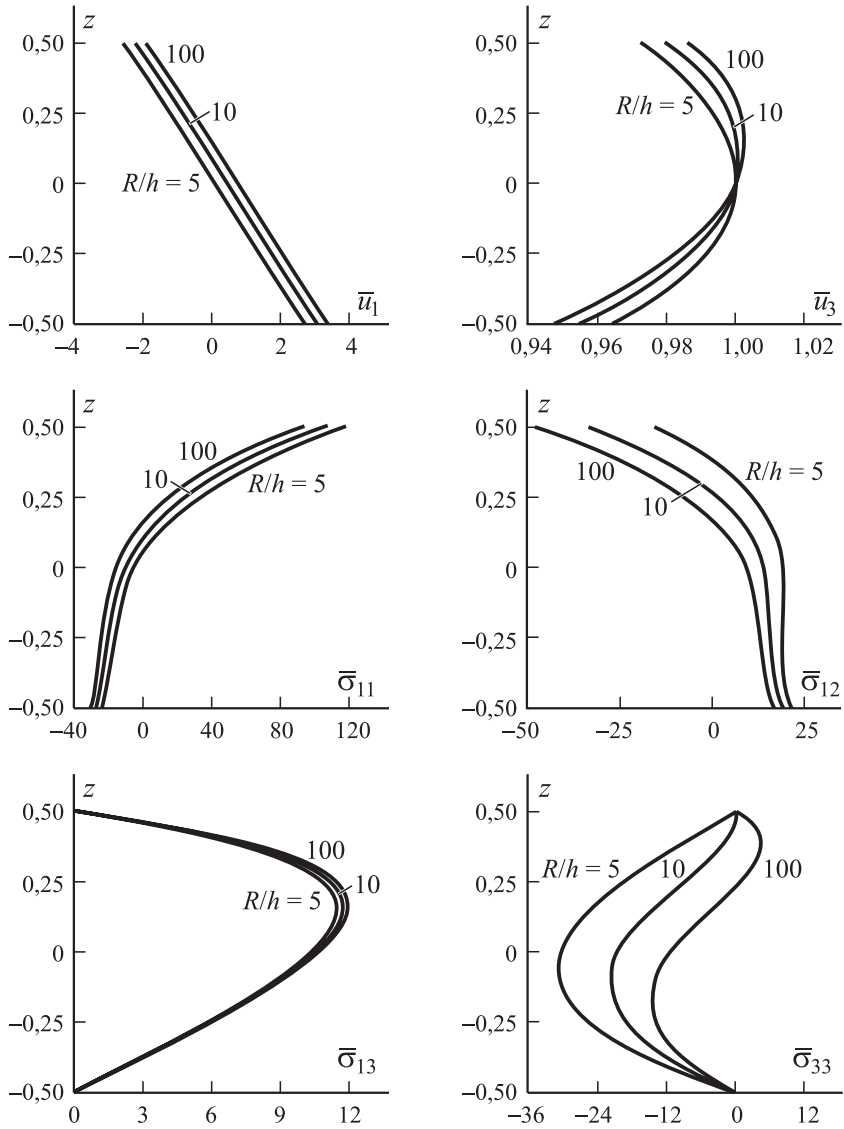


Рис. 3. Распределение перемещений и напряжений по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при  $N = 11$  и  $\gamma = 2$ ,  $r = s = 2$ ,  $q = 1$ ; собственные частоты колебаний  $\bar{\omega}_{22}^{(1)} = 102,11$ ,  $100,11$  и  $100,30$  при  $R/h = 5$ ,  $10$  и  $100$  соответственно.

Из данных табл. 2 видно, что выбор 15 отсчетных поверхностей уже приводит к шести правильным значащим цифрам для напряжений, соответствующих основной форме колебаний, за исключением поперечных нормальных напряжений, для которых требуется большее число отсчетных поверхностей.

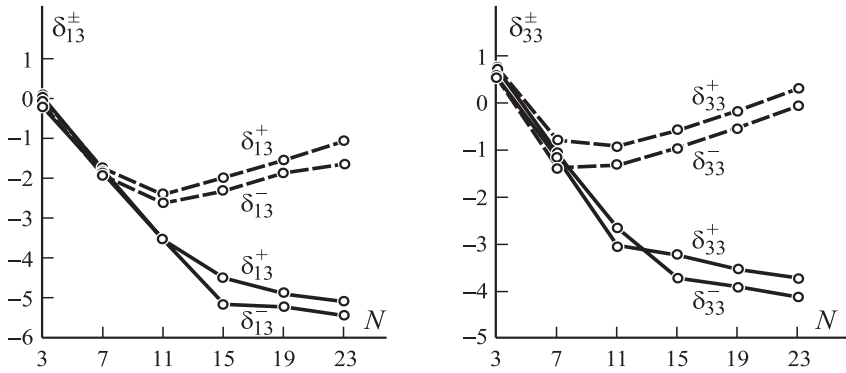


Рис. 4. Логарифмическая погрешность удовлетворения граничных условий  $\delta_{i3}^{\pm} = \lg |\bar{\sigma}_{i3}(\pm 0, 5)|$  для поперечных напряжений на внутренней и внешней поверхностях оболочки при  $R/h = 10$ ,  $\gamma = 2$ ,  $r = s = q = 1$ . Пояснения в тексте.

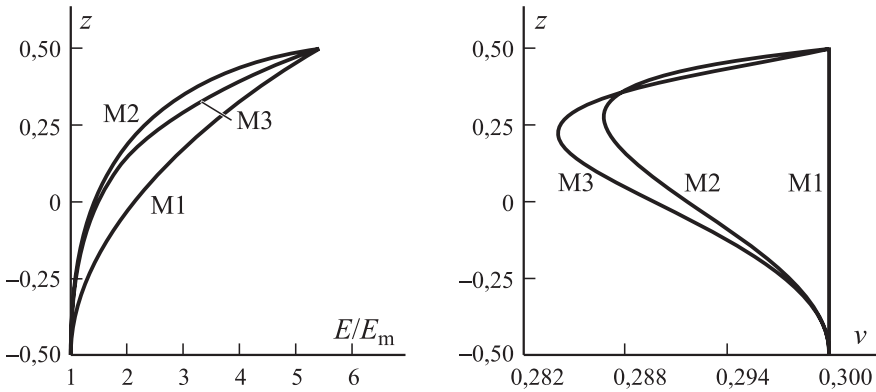


Рис. 5. Распределение модуля упругости и коэффициента Пуассона по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при  $\gamma = 2$  в случае использования закона смеси (M1), модели Мори—Танака (M2) и модели Хилла (M3). Обозначения и для рис. 6—8.

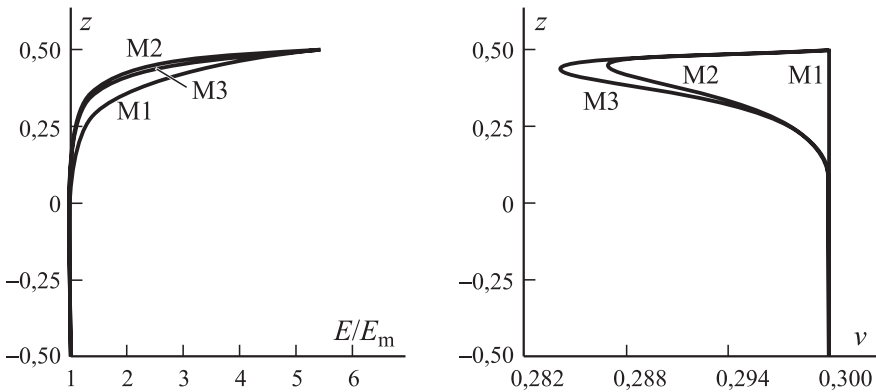


Рис. 6. Распределение модуля упругости и коэффициента Пуассона по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при  $\gamma = 10$ .

Табл. 3

Результаты расчета первых восьми частот  $\bar{\omega}_{11}^{(q)}$  металлокерамической цилиндрической оболочки при  $R/h=10$ ,  $N=11$  и разных значениях  $\gamma$

Модель	$\bar{\omega}_{11}^{(1)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(2)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(3)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(4)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(5)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(6)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(7)}$	$\bar{\omega}_{11}^{(8)}$
$\gamma = 2$								
Закон смеси	34,687	144,59	241,41	886,57	908,52	1613,1	1789,2	1824,7
Хилла	32,079	131,23	217,68	782,58	804,23	1407,3	1613,8	1639,8
Мори—Танака	31,139	125,95	209,05	767,72	788,66	1382,0	1570,7	1597,7
$\gamma = 10$								
Закон смеси	28,568	110,29	183,84	666,74	687,42	1211,1	1365,6	1391,4
Хилла	27,188	104,58	173,76	656,55	675,60	1190,4	1326,0	1353,4
Мори—Танака	26,716	102,90	171,02	655,73	674,19	1189,3	1323,3	1350,7

На рис. 2, 3 проиллюстрировано распределение перемещений и напряжений по толщине оболочки при разном количестве полуволен в про-

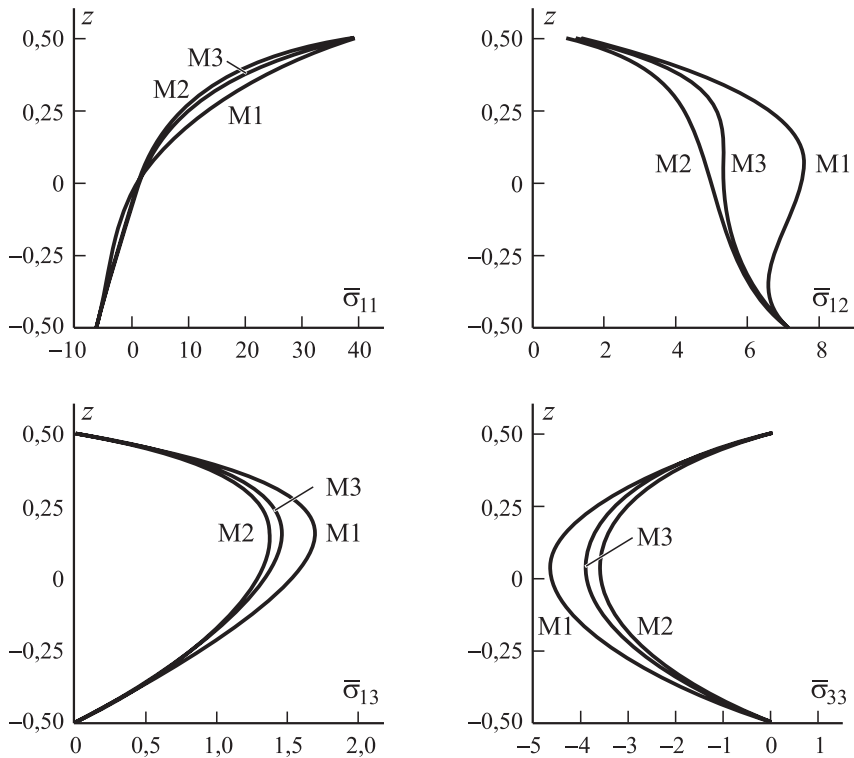


Рис. 7. Распределение напряжений по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при  $N=11$  и  $R/h=10$ ,  $\gamma=2$ ,  $r=s=q=1$ .

дольном и поперечном направлениях в случае выбора 11 отсчетных поверхностей для оболочек с показателем неоднородности  $\gamma = 2$  и разных значениях параметра  $R/h$ . Полученные результаты свидетельствуют о высоком потенциале предложенной теории оболочек высокого порядка, поскольку граничные условия на лицевых поверхностях для поперечных компонент тензора напряжений удовлетворяются с высокой точностью. Дополнительно на рис. 4 представлена логарифмическая погрешность удовлетворения граничных условий  $\delta_{i3}^{\pm} = \lg|\bar{\sigma}_{i3}(\pm 0,5)|$  для поперечных напряжений на внутренней и внешней поверхностях оболочки при использовании большого числа отсчетных поверхностей. Сплошные кривые соответствуют результатам решения задачи в случае выбора в качестве узлов интерполяции корней многочлена Чебышёва, штрихпунктирные — построены на основе подхода с использованием эквидистантных отсчетных поверхностей [11—13]. Таким образом, второй подход не обеспечивает монотонную сходимость вычислительного процесса и может приводить к неадекватному описанию напряженного состояния

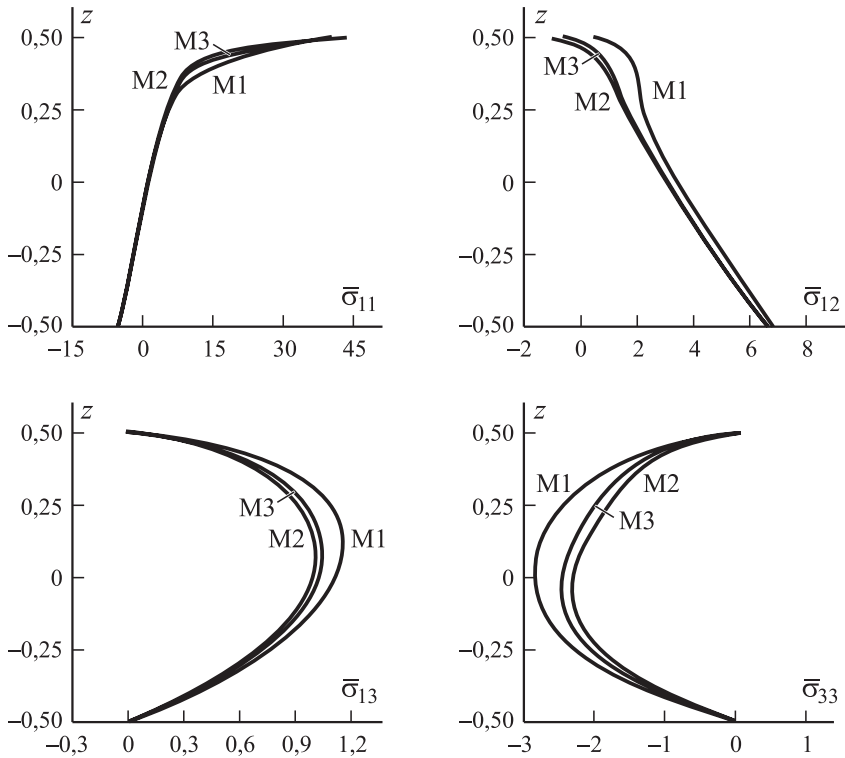


Рис. 8. Распределение напряжений по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при  $N = 11$  и  $R/h = 10$ ,  $\gamma = 10$ ,  $r = s = q = 1$ .

оболочки в зоне краевого эффекта при использовании интерполяционных полиномов Лагранжа высокой степени.

В заключение проанализируем свободные колебания цилиндрической оболочки на основе рассмотренных моделей для описания механических характеристик металлокерамического композита при разных значениях показателя неоднородности  $\gamma$ . На рис. 5, 6 показано распределение модуля упругости и коэффициента Пуассона по толщине металлокерамической оболочки при  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 10$  в случае использования закона смеси, модели Мори—Танака и модели Хилла. Как видим, для металлокерамик с большим показателем неоднородности модели Мори—Танака и Хилла приводят к достаточно близким результатам. Этот вывод подтверждается данными табл. 3, а также рис. 7, 8, на которых показано распределение напряжений, соответствующих основной форме колебаний по толщине оболочки, в случае выбора 11 отсчетных поверхностей.

### Заключение

Рассмотрен метод отсчетных поверхностей и его приложение для решения пространственной задачи о свободных колебаниях цилиндрических оболочек из функциональных материалов. Согласно этому методу внутри тела оболочки вводятся параллельные срединной поверхности и расположенные в узлах многочлена Чебышёва отсчетные поверхности с целью выбора перемещений этих поверхностей в качестве искомых функций. Это дает возможность находить аналитические решения трехмерных динамических задач для металлокерамических композитных оболочек с наперед заданной точностью, так как полученные решения асимптотически приближаются к точным решениям пространственной теории упругости.

*Благодарность.* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-19-30002) и Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 9.4914.2017/ВУ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cheng Z. Q. and Batra R. C. Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate // *Composites: Part B*. — 2000. — Vol. 31. — P. 97—106.
2. Reddy J. N. and Cheng Z. Q. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates // *Europ. J. Mech. A/Solids*. — 2001. — Vol. 20. — P. 841—855.
3. Reddy J. N. and Cheng Z. Q. Frequency of functionally graded plates with three dimensional asymptotic approach // *J. Eng. Mech.* — 2003. — Vol. 129. — P. 896—900.



4. *Vel S. S. and Batra R. C.* Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates // *J. Sound Vib.* — 2004. — Vol. 272. — P. 703—730.
5. *Vel S. S.* Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells // *Composite Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 2712—2727.
6. *Ootao Y. and Tanigawa Y.* Three-dimensional solution for transient thermal stresses of an orthotropic functionally graded rectangular plate // *Composite Struct.* — 2007. — Vol. 80. — P. 10—20.
7. *Alibeigloo A. and Liew K. M.* Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity // *Composite Struct.* — 2014. — Vol. 113. — P. 23—30.
8. *Birman V. and Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* — 2007. — Vol. 60. — P. 195—216.
9. *Jha D. K., Kant T., and Singh R. K.* A critical review of recent research on functionally graded plates // *Composite Struct.* — 2013. — Vol. 96. — P. 833—849.
10. *Swaminathan K., Naveenkumar D. T., Zenkour A. M., and Carrera E.* Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates. A state-of-the-art review // *Composite Struct.* — 2015. — Vol. 120. — P. 10—31.
11. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Решение задачи статики для упругой оболочки в пространственной постановке // *Докл. РАН.* — 2011. — Т. 439, № 5. — С. 613—616.
12. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* On the use of a new concept of sampling surfaces in a shell theory // *Adv. Structured Mater.* — 2011. — Vol. 15. — P. 715—726.
13. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Метод решения трехмерных задач теории упругости для слоистых композитных пластин // *Механика композит. материалов.* — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 23—36.
14. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсчетных поверхностей // *Механика твердого тела.* — 2014. — № 4. — С. 54—64.
15. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 631 с.
16. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Three-dimensional exact analysis of functionally graded laminated composite plates // *Adv. Structured Mater.* — 2015. — Vol. 45. — P. 223—241.
17. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* A sampling surfaces method and its implementation for 3D thermal stress analysis of functionally graded plates // *Composite Struct.* — 2015. — Vol. 120. — P. 315—325.
18. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Расчет в пространственной постановке металлокерамических оболочек на основе метода отсчетных поверхностей // *Механика композит. материалов.* — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 647—660.
19. *Kulikov G. M., Plotnikova S. V., and Mamontov A. A.* Sampling surfaces formulation for thermoelastic analysis of laminated functionally graded shells // *Meccanica.* — 2016. — Vol. 51, No. 8. — P. 1913—1929.
20. *Mori T. and Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metallurgica.* — 1973. — Vol. 21. — P. 571—574.
21. *Benveniste Y.* A new approach to the application of Mori—Tanaka's theory in composite materials // *Mech. Mater.* — 1987. — Vol. 6. — P. 147—157.

22. *Hill R.* A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1965. — Vol. 13. — P. 213—222.

23. *Fazzolari F. A. and Carrera E.* Refined hierarchical kinematics quasi-3D Ritz models for free vibration analysis of doubly curved FGM shells and sandwich shells with FGM core // *J. Sound Vib.* — 2014. — Vol. 333. — P. 1485—1508.

Поступила в редакцию 12.05.2016  
Received May 12, 2016

---