

*Г. М. Куликов\*, С. В. Плотникова*

*Тамбовский государственный технический университет, Россия*

## **МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН**

*G. M. Kulikov\* and S. V. Plotnikova*

### **A METHOD OF SOLVING THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY FOR LAMINATED COMPOSITE PLATES**

**Keywords:** laminated composite plate, high-order model, elasticity theory

An efficient method of solving 3D elasticity problems for thick and thin laminated composite plates is presented. It is based on a new concept of reference surfaces inside the plate. According to this concept, into each  $n$ -th layer,  $I_n$  arbitrary reference surfaces parallel to the midsurface are introduced, and the displacement vectors of these surfaces are chosen as unknown functions. Such a choice allows one to represent the governing equations of the high-order theory of plates proposed in a very compact form and to derive strain–displacement relationships correctly describing all rigid-body motions of laminated plates.

**Ключевые слова:** пластина слоистая композитная, модель высокого порядка, теория упругости

Рассмотрен эффективный метод решения трехмерных задач теории упругости для толстых и тонких слоистых композитных пластин. Метод основан на новой концепции отсчетных поверхностей внутри тела пластины. Согласно этой концепции внутри каждого  $n$ -го слоя введено  $I_n$  произвольным образом расположенных отсчетных поверхностей, параллельных срединной поверхности, и в качестве искоемых функций выбраны векторы перемещений этих поверхностей. Такой выбор искоемых функций позволяет представить разрешающие уравнения предложенной

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: kulikov@apmath.tstu.ru  
Corresponding author: kulikov@apmath.tstu.ru

теории пластин высокого порядка в достаточно компактной форме и получить деформационные соотношения, которые корректно описывают перемещения пластины как жесткого тела.

### Введение

Как известно, традиционный путь построения теории пластин и оболочек заключается в разложении перемещений в степенные ряды относительно поперечной координаты  $\theta_3$ , отсчитываемой вдоль внешней нормали к срединной поверхности [1—3]. Для приближенного представления поля перемещений можно воспользоваться конечными отрезками степенных рядов, поскольку основная цель теории пластин и оболочек — получение приближенных решений задач трехмерной теории упругости. Идея этого подхода восходит к работам Коши [4]. Получила также развитие теория оболочек на основе разложения поля перемещений в ряды по полиномам Лежандра относительно поперечной координаты [5]. Однако кажущееся преимущество этой теории теряется при ее применении в задачах статики толстых пластин и оболочек, в которых для получения приемлемых результатов необходимо удерживать достаточно большое число членов в соответствующих разложениях.

Альтернативный подход связан с введением внутри каждого слоя  $I_n$  отсчетных поверхностей  $\Omega^{(n)1}, \Omega^{(n)2}, \dots, \Omega^{(n)I_n}$ , параллельных срединной поверхности, с целью использования векторов перемещений этих поверхностей  $\mathbf{u}^{(n)1}, \mathbf{u}^{(n)2}, \dots, \mathbf{u}^{(n)I_n}$  в качестве искомым функций. При этом поверхности  $\Omega^{(n)1}$  и  $\Omega^{(n)I_n}$  совпадают с поверхностями раздела слоев  $\Omega^{[n-1]}$  и  $\Omega^{[n]}$ . Здесь и далее верхний индекс  $n$  указывает на принадлежность некоторой величины к  $n$ -му слою и принимает значения  $1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — число слоев в пакете. Такой выбор искомым функций с последующим использованием полиномов Лагранжа степени  $I_n - 1$  в пространственных аппроксимациях перемещений позволяет построить деформационные соотношения, которые точно представляют перемещения слоистой пластины как жесткого тела.

### Кинематика пластины и деформационные соотношения

Рассмотрим пластину постоянной толщины  $h$ . Отнесем срединную поверхность  $\Omega$  к криволинейным ортогональным координатам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , а координату  $\theta_3$  будем отсчитывать в направлении нормали. Базисные векторы срединной поверхности представим в виде

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = A_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$  — радиус-вектор точки срединной поверхности;  $A_\alpha(\theta_1, \theta_2)$  — коэффициенты первой квадратичной формы;  $\mathbf{e}_\alpha(\theta_1, \theta_2)$  — единичные векторы касательных к координатным линиям  $\theta_\alpha$ ;  $\mathbf{e}_3$  — единичный вектор нормали к срединной поверхности. Базисные векторы отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$ , расположенной внутри  $n$ -го слоя (рис. 1), имеют вид

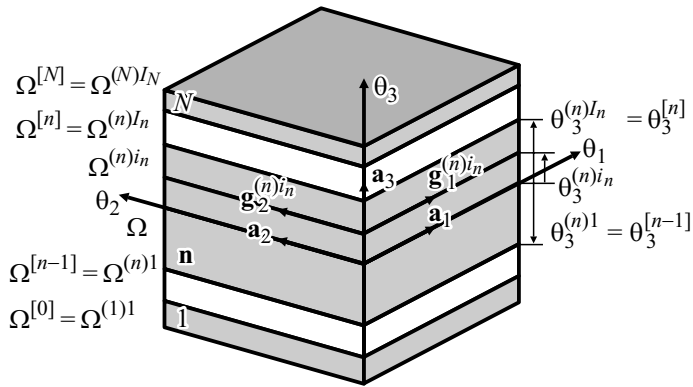


Рис. 1. Схема расположения отсчетных поверхностей в пластине.

$$\mathbf{g}_\alpha^{(n)i_n} = \mathbf{R}_{,\alpha}^{(n)i_n} = A_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3^{(n)i_n} = \mathbf{e}_3, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}^{(n)i_n} = \mathbf{r} + \theta_3^{(n)i_n} \mathbf{e}_3$  — радиус-вектор точки отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$ ;  $\theta_3^{(n)i_n}$  — поперечная координата поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$ . При этом справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \theta_3^{(1)1} = \theta_3^{[0]} = -h/2, \quad \theta_3^{(N)I_N} = \theta_3^{[N]} = h/2, \\ \theta_3^{(m)I_m} = \theta_3^{(m+1)1} = \theta_3^{[m]} \quad (m=1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее  $\alpha, \beta = 1, 2$ ;  $i, j, k, m = 1, 2, 3$ ;  $i_n, j_n, k_n = 1, 2, \dots, I_n$ .

Базисные векторы отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  в деформированном состоянии (рис. 2) находим по формулам

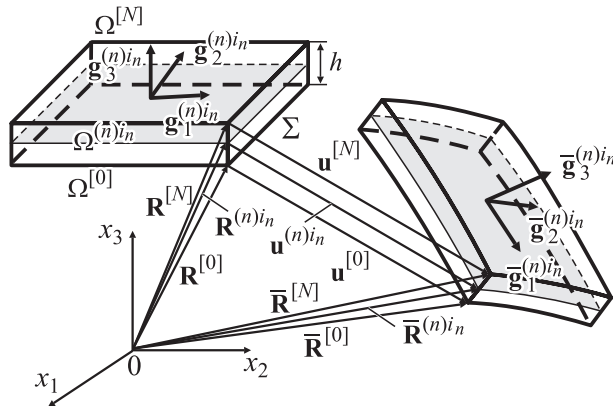


Рис. 2. Начальная и деформированная конфигурации пластины.

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha}^{(n)i_n} = \bar{\mathbf{R}}_{,\alpha}^{(n)i_n} = \mathbf{g}_{\alpha}^{(n)i_n} + \mathbf{u}_{,\alpha}^{(n)i_n}, \quad \bar{\mathbf{g}}_3^{(n)i_n} = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}^{(n)i_n}, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(n)i_n} = \mathbf{R}^{(n)i_n} + \mathbf{u}^{(n)i_n}, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{(n)i_n} = \mathbf{u}(\theta_3^{(n)i_n}), \quad \boldsymbol{\beta}^{(n)i_n} = \mathbf{u}_{,3}(\theta_3^{(n)i_n}), \quad (6)$$

где  $\bar{\mathbf{R}}^{(n)i_n}$  — радиус-вектор точки деформированной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$ ;  $\mathbf{u}^{(n)i_n}(\theta_1, \theta_2)$  — вектор перемещений отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$ ;  $\boldsymbol{\beta}^{(n)i_n}(\theta_1, \theta_2)$  — значение производной вектора перемещений по поперечной координате на поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$ . Из соображений непрерывности поля перемещений имеем

$$\mathbf{u}^{(1)l} = \mathbf{u}^{[0]}, \quad \mathbf{u}^{(N)l_N} = \mathbf{u}^{[N]}, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{(m)l_m} = \mathbf{u}^{(m+1)l} = \mathbf{u}^{[m]} \quad (m = 1, 2, \dots, N-1),$$

где  $\mathbf{u}^{[m]}(\theta_1, \theta_2)$  — векторы перемещений поверхностей раздела слоев.

Компоненты тензора деформаций на отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  с учетом  $A_3 = 1$  имеют вид

$$2\varepsilon_{ij}^{(n)i_n} = 2\varepsilon_{ij}(\theta_3^{(n)i_n}) = \frac{1}{A_i A_j} (\bar{\mathbf{g}}_i^{(n)i_n} \cdot \bar{\mathbf{g}}_j^{(n)i_n} - \mathbf{g}_i^{(n)i_n} \cdot \mathbf{g}_j^{(n)i_n}). \quad (8)$$

Вводя базисные векторы (2), (4) в деформационные соотношения пространственной теории упругости (8) и пренебрегая нелинейными членами, получим

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)i_n} = \frac{1}{A_{\alpha}} \mathbf{u}_{,\alpha}^{(n)i_n} \cdot \mathbf{e}_{\beta} + \frac{1}{A_{\beta}} \mathbf{u}_{,\beta}^{(n)i_n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (9)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)i_n} = \boldsymbol{\beta}^{(n)i_n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{1}{A_{\alpha}} \mathbf{u}_{,\alpha}^{(n)i_n} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \varepsilon_{33}^{(n)i_n} = \boldsymbol{\beta}^{(n)i_n} \cdot \mathbf{e}_3.$$

Представим векторы  $\mathbf{u}^{(n)i_n}$  и  $\boldsymbol{\beta}^{(n)i_n}$  в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_i$  согласно формулам

$$\mathbf{u}^{(n)i_n} = \sum_i u_i^{(n)i_n} \mathbf{e}_i, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(n)i_n} = \sum_i \beta_i^{(n)i_n} \mathbf{e}_i. \quad (11)$$

Из разложения (10) с учетом известных формул дифференцирования базисных векторов  $\mathbf{e}_i$  по координатам  $\theta_{\alpha}$  следует, что

$$\frac{1}{A_{\alpha}} \mathbf{u}_{,\alpha}^{(n)i_n} = \sum_i \lambda_{i\alpha}^{(n)i_n} \mathbf{e}_i, \quad (12)$$

где

$$\lambda_{\alpha\alpha}^{(n)i_n} = \frac{1}{A_{\alpha}} u_{\alpha,\alpha}^{(n)i_n} + B_{\alpha} u_{\beta}^{(n)i_n}, \quad \lambda_{\beta\alpha}^{(n)i_n} = \frac{1}{A_{\alpha}} u_{\beta,\alpha}^{(n)i_n} - B_{\alpha} u_{\alpha}^{(n)i_n} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (13)$$

$$\lambda_{3\alpha}^{(n)i_n} = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^{(n)i_n}, \quad B_\alpha = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta} \quad (\beta \neq \alpha). \quad (13)$$

Вводя разложения (11), (12) в (9), приходим к скалярной форме деформационных соотношений

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)i_n} &= \lambda_{\alpha\beta}^{(n)i_n} + \lambda_{\beta\alpha}^{(n)i_n}, \\ 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)i_n} &= \beta_\alpha^{(n)i_n} + \lambda_{3\alpha}^{(n)i_n}, \quad \varepsilon_{33}^{(n)i_n} = \beta_3^{(n)i_n}. \end{aligned} \quad (14)$$

### Пространственные аппроксимации полей перемещений и деформаций

Заметим, что до этого момента не было сделано никаких предположений о характере распределения полей перемещений и деформаций в пластине. Пусть перемещения распределены в поперечном направлении пластины согласно следующему закону:

$$u_i^{(n)} = \sum_{i_n} L^{(n)i_n} u_i^{(n)i_n}, \quad \theta_3^{[n-1]} \leq \theta_3 \leq \theta_3^{[n]}, \quad (15)$$

где  $L^{(n)i_n}(\theta_3)$  — полиномы Лагранжа степени  $I_n - 1$ , определяемые по формуле

$$L^{(n)i_n} = \prod_{j_n \neq i_n} \frac{\theta_3 - \theta_3^{(n)j_n}}{\theta_3^{(n)i_n} - \theta_3^{(n)j_n}}. \quad (16)$$

При этом  $L^{(n)i_n}(\theta_3^{(n)j_n}) = 1$  при  $j_n = i_n$  и  $L^{(n)i_n}(\theta_3^{(n)j_n}) = 0$  при  $j_n \neq i_n$ .

Из соотношений (6), (11), (15) имеем

$$\beta_i^{(n)i_n} = \sum_{j_n} M^{(n)j_n}(\theta_3^{(n)i_n}) u_i^{(n)j_n}, \quad (17)$$

где  $M^{(n)j_n} = L_3^{(n)j_n}$  — полиномы степени  $I_n - 2$ ; их значения на отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  согласно (16) находим по формулам

$$\begin{aligned} M^{(n)j_n}(\theta_3^{(n)i_n}) &= \frac{1}{\theta_3^{(n)j_n} - \theta_3^{(n)i_n}} \prod_{k_n \neq i_n, j_n} \frac{\theta_3^{(n)i_n} - \theta_3^{(n)k_n}}{\theta_3^{(n)j_n} - \theta_3^{(n)k_n}} \quad (j_n \neq i_n), \\ M^{(n)i_n}(\theta_3^{(n)i_n}) &= - \sum_{j_n \neq i_n} M^{(n)j_n}(\theta_3^{(n)i_n}). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, определяющие функции предлагаемой теории пластин  $\beta_i^{(n)i_n}$  представлены в виде линейной комбинации перемещений отсчетных поверхностей  $u_i^{(n)j_n}$ .

Следующий шаг заключается в выборе закона распределения деформаций по толщине пластины. Очевидно, что распределение деформаций в попереч-

ном направлении должно быть согласовано с распределением перемещений (15), т.е. имеем

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \sum_{i_n} L^{(n)i_n} \varepsilon_{ij}^{(n)i_n}, \quad \theta_3^{[n-1]} \leq \theta_3 \leq \theta_3^{[n]}. \quad (19)$$

*Утверждение.* Деформационные соотношения (9), (19) совместно с пространственными аппроксимациями (15), (17) точно представляют перемещение слоистой пластины как жесткого тела.

▷ Перемещение отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  как жесткого целого можно представить в виде [6, 7]

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(n)i_n})^{\text{Rigid}} &= \mathbf{\Delta} + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{R}^{n(i_n)}, \\ \mathbf{\Delta} &= \sum_i \Delta_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{\Phi} = \sum_i \Phi_i \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{\Delta}$  — вектор поступательного перемещения пластины;  $\mathbf{\Phi}$  — вектор вращений. Из соотношений (20) с учетом (2) и

$$\mathbf{\Delta}_{,\alpha} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Phi}_{,\alpha} = \mathbf{0} \quad (21)$$

следует

$$(\mathbf{u}^{(n)i_n})^{\text{Rigid}} = A_\alpha \mathbf{\Phi} \times \mathbf{e}_\alpha. \quad (22)$$

Принимая во внимание тождества

$$\sum_{j_n} M^{(n)j_n}(\theta_3) = 0, \quad \sum_{j_n} \theta_3^{(n)j_n} M^{(n)j_n}(\theta_3) = 1, \quad (23)$$

которые в свою очередь вытекают из очевидных тождеств

$$\sum_{j_n} L^{(n)j_n}(\theta_3) = 1, \quad \sum_{j_n} \theta_3^{(n)j_n} L^{(n)j_n}(\theta_3) = \theta_3, \quad (24)$$

находим

$$(\boldsymbol{\beta}^{(n)i_n})^{\text{Rigid}} = \sum_{j_n} M^{(n)j_n}(\theta_3^{(n)i_n}) (\mathbf{u}^{(n)j_n})^{\text{Rigid}} = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{e}_3. \quad (25)$$

Вводя (22), (25) в деформационные соотношения (9), получим

$$2(\varepsilon_{ij}^{(n)i_n})^{\text{Rigid}} = (\mathbf{\Phi} \times \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j + (\mathbf{\Phi} \times \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i = 0, \quad (26)$$

что и требовалось доказать. ◁

### Вариационная формулировка задачи

Подставим деформации (19) в принцип виртуальной работы и, вводя результирующие напряжения

$$H_{ij}^{(n)i_n} = \int_{\theta_3^{[n-1]}}^{\theta_3^{[n]}} \sigma_{ij}^{(n)} L^{(n)i_n} d\theta_3, \quad (27)$$

приходим к вариационному уравнению

$$\iint_{\Omega} \left[ \sum_n \sum_{i,j} H_{ij}^{(n)i} \delta \varepsilon_{ij}^{(n)i} - \sum_i \left( p_i^+ \delta u_i^{[N]} - p_i^- \delta u_i^{[0]} \right) \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 = \delta W_{\Sigma}, \quad (28)$$

где  $p_i^-$ ,  $p_i^+$  — поверхностные нагрузки, действующие на внутренней и внешней поверхностях пластины;  $W_{\Sigma}$  — работа внешних сил, действующих на боковой поверхности  $\Sigma$ .

Ограничимся рассмотрением линейно-упругих материалов, для которых применимы соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sum_{k,\ell} C_{ijkl}^{(n)} \varepsilon_{k\ell}^{(n)}, \quad \theta_3^{[n-1]} \leq \theta_3 \leq \theta_3^{[n]}. \quad (29)$$

Введем далее напряжения (29) в (27) и, учитывая обозначение

$$D_{ijkl}^{(n)i_n j_n} = C_{ijkl}^{(n)} \int_{\theta_3^{[n-1]}}^{\theta_3^{[n]}} L^{(n)i_n} L^{(n)j_n} d\theta_3, \quad (30)$$

получим выражение для вычисления результирующих напряжений

$$H_{ij}^{(n)i_n} = \sum_{j_n} \sum_{k,\ell} D_{ijkl}^{(n)i_n j_n} \varepsilon_{k\ell}^{(n)j_n}. \quad (31)$$

*З а м е ч а н и е.* Определенный интеграл (30) может быть вычислен точно путем применения квадратурных формул Гаусса с порядком точности  $2I_n - 1$ .

### Конечно-элементная формулировка задачи

Вариационное уравнение (28) с учетом (30), (31) является основой для построения конечного элемента слоистой пластины. Для перемещений отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$u_i^{(n)i_n} = \sum_r N_r u_{ir}^{(n)i_n}, \quad (32)$$

где  $N_r(\xi_1, \xi_2)$  — билинейные функции формы конечного элемента;  $u_{ir}^{(n)i_n}$  — перемещения отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  в узлах элемента;  $\xi_1, \xi_2$  — нормализованные координаты конечного элемента; индекс  $r$  обозначает номер узла и изменяется от 1 до 4.

Для деформаций отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  также используем билинейные интерполяции [8, 9]

$$\varepsilon_{ij}^{(n)i_n} = \sum_r N_r \varepsilon_{ijr}^{(n)i_n}, \quad (33)$$

где  $\varepsilon_{ijr}^{(n)i_n}$  — деформации отсчетной поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  в узлах элемента. Отметим, что аппроксимация (33) дает возможность применить эффективное аналитическое интегрирование в пределах конечного элемента [10, 11].

Вводя конечно-элементные аппроксимации (32), (33) в вариационные уравнения (28), (31) и учитывая новое обозначение для вектора узловых перемещений

$$\mathbf{U} = \left[ \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_2^T \mathbf{U}_3^T \mathbf{U}_4^T \right]^T,$$

$$\mathbf{U}_r = \left[ \left( \mathbf{u}_r^{[0]} \right)^T \left( \mathbf{u}_r^{(1)2} \right)^T \dots \left( \mathbf{u}_r^{(1)I_1-1} \right)^T \left( \mathbf{u}_r^{[1]} \right)^T \left( \mathbf{u}_r^{(2)2} \right)^T \dots \right. \\ \left. \dots \left( \mathbf{u}_r^{(N-1)I_{N-1}-1} \right)^T \left( \mathbf{u}_r^{[N-1]} \right)^T \left( \mathbf{u}_r^{(N)2} \right)^T \dots \left( \mathbf{u}_r^{(N)I_N-1} \right)^T \left( \mathbf{u}_r^{[N]} \right)^T \right]^T, \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_r^{[m]} = \left[ u_{1r}^{[m]} \ u_{2r}^{[m]} \ u_{3r}^{[m]} \right]^T \quad (m = 0, 1, \dots, N),$$

$$\mathbf{u}_r^{(n)m_n} = \left[ u_{1r}^{(n)m_n} \ u_{2r}^{(n)m_n} \ u_{3r}^{(n)m_n} \right]^T \quad (m_n = 2, \dots, I_n - 1),$$

приходим к уравнениям равновесия конечного элемента слоистой пластины

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (35)$$

где  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости конечного элемента;  $\mathbf{F}$  — вектор поверхностных нагрузок.

### Численные результаты и их обсуждение

1. В качестве первого примера рассмотрим цилиндрический изгиб шарнирно опертой трехслойной композитной пластины с углами укладки слоев  $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$ , нагруженной поперечной нагрузкой  $p_3^+ = p_0 \sin(\pi\theta_1/a)$ , где  $a$  — длина пластины. Пластина изготовлена из композитных слоев со следующими геометрическими и механическими параметрами:  $h_1 = h_3 = 0,25$ ,  $h_2 = 0,5$ ,  $E_L = 25E_T$ ,  $G_{LT} = 0,5E_T$ ,  $G_{TT} = 0,2E_T$ ,  $E_T = 10^6$ ,  $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25$ . Индексы L и T соответствуют направлению армирования и поперечному направлению. Чтобы удовлетворить граничным условиям на торцах пластины, было принято  $u_3^{(n)i_n} = 0$ , где  $n = 1, 2, 3$  и  $i_n = 1, 2, \dots, I_n$ . Для сравнения с аналитическим решением плоской задачи теории упругости [12] введем безразмерные величины

$$U_3 = 100E_T h^3 u_3(a/2, z) / p_0 a^4,$$

$$S_{11} = 10h^2 \sigma_{11}(a/2, z) / p_0 a^2, \quad S_{12} = 10h^2 \sigma_{12}(a/2, z) / p_0 a^2, \quad (36)$$

$$S_{\alpha 3} = 10h \sigma_{\alpha 3}(0, z) / p_0 a, \quad S_{33} = \sigma_{33}(a/2, z) / p_0, \quad z = \theta_3/h.$$



Табл. 1

Результаты расчета цилиндрического изгиба толстой пластины при  $a/h = 4$

Вариант	$U_3(-0,5)$	$U_3(0)$	$U_3(0,5)$	$S_{11}(0,5)$	$S_{12}(0,5)$	$S_{13}(0)$	$S_{23}(0,3)$	$S_{33}(0,5)$
$I_n=3$	3,192	3,253	3,375	8,396	-4,022	4,366	-1,261	1,032
$I_n=4$	3,230	3,290	3,413	8,520	-4,080	5,021	-1,263	1,007
$I_n=5$	3,230	3,290	3,413	8,519	-4,080	5,021	-1,256	1,000

Вследствие симметрии задачи рассмотрена половина пластины, которая смоделирована с помощью 64 конечных элементов, характеризующих плоское деформированное состояние пластины. Данные табл. 1 показывают, что при надлежащем выборе равноудаленных отсчетных поверхностей можно добиться хорошего согласования с аналитическим решением даже для случая толстой пластины (см. также рис. 3). Распределение напряжений по толщине пластины, показанное на рис. 3, в случае выбора 10 равноудаленных отсчетных поверхностей ( $I_1 = I_2 = I_3 = 4$ ) при  $a/h = 10, 100$  и 16 отсчетных поверхностей ( $I_1 = I_2 = I_3 = 6$ ) при  $a/h = 2, 4$  также свидетельствует о

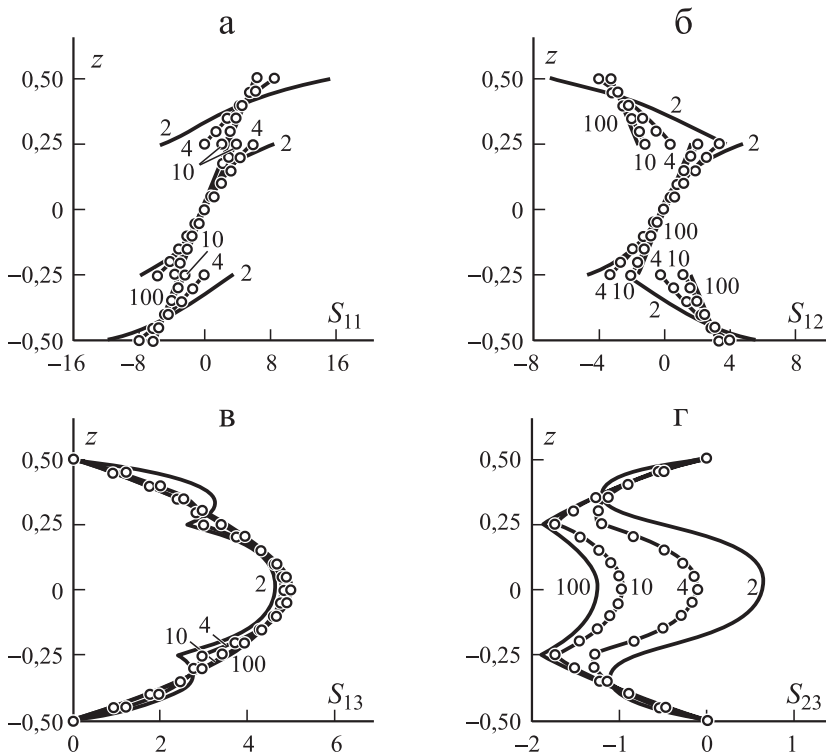


Рис. 3. Распределение напряжений  $S_{11}$  (а),  $S_{12}$  (б),  $S_{13}$  (в) и  $S_{23}$  (г) по толщине пластины: точное решение [12] (○) и данная теория слоистых пластин (—) при разных значениях  $a/h$  (цифры у кривых).

Табл. 2

Результаты расчета для толстой прямоугольной пластины при  $a/h = 2$

Вариант	$U_3(0)$	$S_{11}(0,5)$	$10S_{22}(1/6)$	$10^2S_{12}(0,5)$	$10S_{13}(0)$	$10^2S_{23}(0)$	$S_{33}(0,5)$
$I_n=2$	7,325	1,578	1,934	-4,917	2,529	5,788	0,879
$I_n=3$	7,911	1,926	2,217	-5,342	2,441	5,726	1,035
$I_n=4$	8,168	2,129	2,293	-5,629	2,570	6,680	1,037
[13]	8,17	2,13	2,30	-5,64	2,57	6,68	1,00

высоком потенциале предложенного метода решения задач статики для слоистых пластин в трехмерной постановке. Как видим, граничные условия на лицевых поверхностях пластины и условия непрерывности на поверхностях раздела слоев для поперечных касательных напряжений удовлетворяются с достаточной для практики точностью.

2. Рассмотрим шарнирно опертую прямоугольную трехслойную композитную пластину с углами укладки слоев  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , нагруженную синусоидально распределенной нагрузкой

$$p_3^+ = p_0 \sin(\pi\theta_1/a) \sin(\pi\theta_2/b), \tag{37}$$

где  $a, b$  — длина и ширина пластины. Геометрические параметры пластины следующие:  $b = 3a$ ,  $h = 1$  и  $h_n = h/3$ . Механические характеристики композита даны в предыдущем примере. Для сравнения с аналитическим решением пространственной задачи теории упругости [13] введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} U_3 &= 100E_T h^3 u_3(a/2, b/2, z) / p_0 a^4, \\ S_{\alpha\alpha} &= h^2 \sigma_{\alpha\alpha}(a/2, b/2, z) / p_0 a^2, \quad S_{12} = h^2 \sigma_{12}(0, 0, z) / p_0 a^2, \\ S_{13} &= h \sigma_{13}(0, b/2, z) / p_0 a, \quad S_{23} = h \sigma_{23}(a/2, 0, z) / p_0 a, \\ S_{33} &= \sigma_{33}(a/2, b/2, z) / p_0, \quad z = \theta_3/h. \end{aligned} \tag{38}$$

Табл. 3

Результаты расчета для тонкой и толстой прямоугольных пластин

$a/h$	$I_n=4$				Точное решение [13]			
	$U_3(0)$	$S_{11}(0,5)$	$10S_{13}(0)$	$10^2S_{23}(0)$	$U_3(0)$	$S_{11}(0,5)$	$10S_{13}(0)$	$10^2S_{23}(0)$
4	2,823	1,144	3,510	3,336	2,82	1,14	3,51	3,34
10	0,919	0,726	4,200	1,523	0,919	0,726	4,20	1,52
100	0,508	0,624	4,392	1,083	0,508	0,624	4,39	1,08

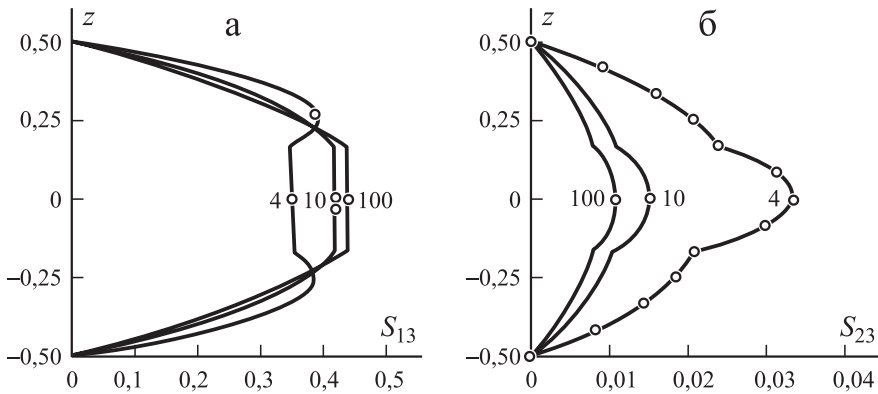


Рис. 4. Распределение напряжений  $S_{13}$  (а) и  $S_{23}$  (б) по толщине прямоугольной пластины: точное решение [13] (○) и данная теория слоистых пластин (—) при разных значениях  $a/h$  (цифры у кривых).

Вследствие симметрии задачи рассмотрена четвертая часть пластины. При этом каждую отсчетную поверхность  $\Omega^{(n)}i_n$  моделировали с помощью равномерных  $64 \times 64$  конечно-элементных сеток. Данные табл. 2, 3 показывают, что при надлежащем выборе равноудаленных отсчетных поверхностей можно добиться хорошего согласования с точным решением пространственной задачи теории упругости даже для случая толстой пластины. Распределение поперечных касательных напряжений по толщине пластины (рис. 4) свидетельствует о том, что в случае выбора 10 равноудаленных отсчетных поверхностей возможно удовлетворение граничных условий на лицевых поверхностях пластины, а также условий непрерывности на поверхностях раздела слоев с приемлемой для инженерных расчетов точностью.

3. Изучим далее шарнирно опертую квадратную трехслойную пластину типа сэндвич, нагруженную нагрузкой, распределенной по лицевой поверхности  $\Omega^{[3]}$  согласно формуле (37), где  $b = a$ . Толщины несущих слоев и заполнителя соответствуют данным работы [13]:  $h_1 = h_3 = 0,1$  и  $h_2 = 0,8$ . Механические характеристики несущих слоев представлены в первом примере; для заполнителя выбираем следующие значения:  $E_1 = E_2 = 4 \cdot 10^4$ ,

Табл. 4

Результаты расчета для квадратной трехслойной пластины при  $a/h = 2$

Вариант	$S_{11}(0,5)$	$S_{11}(0,4)$	$10S_{22}(0,5)$	$10S_{12}(0,5)$	$10S_{13}(0)$	$10S_{23}(0)$	$S_{33}(0,5)$
$I_n=2$	3,132	-2,220	4,514	-2,312	1,845	1,379	1,207
$I_n=3$	3,267	-2,210	4,515	-2,395	1,817	1,354	1,017
$I_n=4$	3,278	-2,220	4,521	-2,402	1,848	1,399	1,008
[13]	3,278	-2,220	4,517	-2,403	1,85	1,399	1,000

Табл. 5

Результаты расчета для тонкой и толстой квадратных трехслойных пластин

$a/h$	$I_n=4$				Точное решение [13]			
	$S_{11}(0,5)$	$10S_{12}(0,5)$	$10S_{13}(0)$	$10S_{23}(0)$	$S_{11}(0,5)$	$10S_{12}(0,5)$	$10S_{13}(0)$	$10S_{23}(0)$
4	1,555	-1,436	2,386	1,072	1,556	-1,437	2,39	1,072
10	1,153	-0,706	2,997	0,527	1,153	-0,707	3,00	0,527
100	1,097	-0,436	3,239	0,297	1,098	-0,437	3,24	0,297

$E_3 = 5 \cdot 10^5$ ,  $G_{13} = G_{23} = 6 \cdot 10^4$ ,  $G_{12} = 1,6 \cdot 10^4$ ,  $\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{12} = 0,25$ . Для сравнения с аналитическим решением пространственной задачи теории упругости [13] также вводим безразмерные величины (38).

Принимая во внимание условия симметрии, рассмотрим четвертую часть пластины, моделируя отсчетные поверхности  $\Omega^{(n)i_n}$  с помощью равномерных  $64 \times 64$  конечно-элементных сеток. Данные табл. 4, 5 показывают, что при соответствующем выборе равноудаленных отсчетных поверхностей можно прийти к удовлетворительному согласованию с аналитическим решением как для толстых, так и тонких трехслойных пластин типа сэндвич. Распределение поперечных касательных напряжений по толщине пластины, представленное на рис. 5, также свидетельствует о корректном удовлетворении граничных условий на лицевых поверхностях пластины и условий непрерывности на поверхностях раздела слоев.

4. В заключение рассмотрим шарнирно опертую секториальную трехслойную пластину типа сэндвич, нагруженную на лицевой поверхности  $\Omega^{[3]}$  равномерным давлением  $p_3^+ = p_0$ . Геометрия пластины показана на рис. 6— $a$  ( $b = 5a$  и  $h_1 = h_3 = 0,1$ ,  $h_2 = 0,8$ ). Несущие слои и наполнитель изготовлены из изотропных материалов:  $E_f = 10^7$ ,  $\nu_f = 0,3$ ; и  $E_c = 10^5$ ,  $\nu_c = 0,4$ .

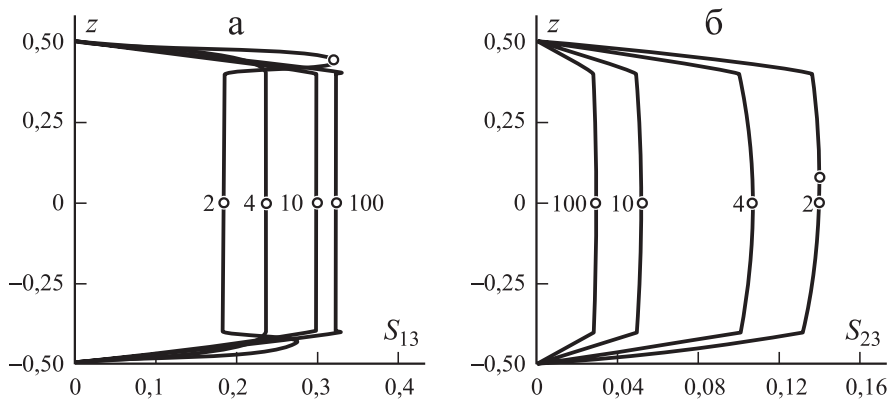


Рис. 5. Распределение напряжений  $S_{13}$  (а),  $S_{23}$  (б) по толщине квадратной трехслойной пластины. Обозначения те же, что на рис. 4.

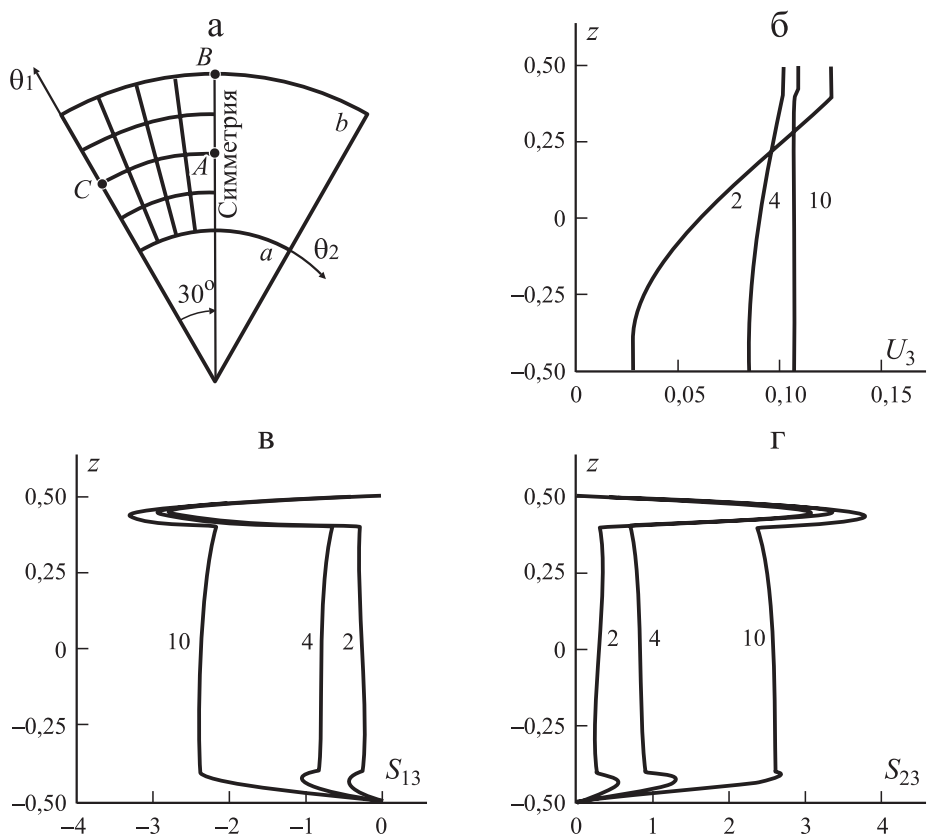


Рис. 6. Геометрия пластины (а), распределение поперечного перемещения  $U_3$  (б) и поперечных касательных напряжений  $S_{13}$  (в),  $S_{23}$  (г) по толщине пластины на основе данной теории слоистых пластин при разных значениях  $b/h$  (цифры у кривых).

Вследствие симметрии задачи рассмотрим половину пластины, моделируя каждую из отсчетных поверхностей равномерными  $64 \times 32$  конечно-элементными сетками. Как видим, результаты расчета безразмерных перемещений и напряжений

$$U_3 = E_c h u_3 \left( (b-a)/2, 30^\circ, z \right) / p_0 b^2,$$

$$S_{13} = \sigma_{13} \left( (b-a)/2, 30^\circ, z \right) / p_0, \quad S_{23} = \sigma_{23} \left( (b-a)/2, 0, z \right) / p_0,$$

показанные на рис. 6 для сечений пластины  $A, B, C$  путем использования 13 равноудаленных отсчетных поверхностей ( $I_1 = I_2 = I_3 = 5$ ), хорошо согласуются с имеющимися представлениями о характере распределения поперечных компонент тензора напряжений по толщине пакета.

*Благодарность.* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/10003).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композит. материалов. — 1988. — № 2. — С. 287—298.
2. Noor A. K. and Burton W. S. Assessment of computational models for multilayered composite shells // Appl. Mech. Rev. — 1990. — Vol. 43. — P. 67—97.
3. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Arch. Comp. Meth. Eng. — 2002. — Vol. 9. — P. 1—60.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 432 с.
5. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — М.: Наука, 1982. — 288 с.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
7. Куликов Г. М. Деформационные соотношения, точно представляющие большие перемещения оболочки как жесткого тела // Механика твердого тела. — 2004. — Т. 39, № 5. — С. 130—140.
8. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Расчет композитных конструкций под действием следящих нагрузок с использованием геометрически точного элемента оболочки // Механика композит. материалов. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 789—804.
9. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Контактное взаимодействие композитных оболочек с жестким выпуклым основанием, подверженных действию следящих нагрузок // Механика композит. материалов. — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 61—78.
10. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part II. Enhanced finite element technique // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2006. — Vol. 195. — P. 2209—2230.
11. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Non-linear geometrically exact assumed stress-strain four-node solid-shell element with high coarse-mesh accuracy // Finite Elem. Anal. Des. — 2007. — Vol. 43. — P. 425—443.
12. Pagano N. J. Influence of shear coupling in cylindrical bending of anisotropic laminates // J. Composite Mater. — 1970. — Vol. 4. — P. 330—343.
13. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. Composite Mater. — 1970. — Vol. 4. — P. 20—34.

Поступила в редакцию 03.10.2011

Received Oct. 3, 2011

---