

Э. И. Григолюк*, Г. М. Куликов**, С. В. Плотникова**

*Московский государственный технический университет "МАМИ", Россия

**Тамбовский государственный технический университет, Россия

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

E. I. Grigolyuk, G. M. Kulikov, and S. V. Plotnikova

CONTACT PROBLEM FOR A PNEUMATIC TIRE INTERACTING WITH A RIGID FOUNDATION

Keywords: multilayered shell, finite-element method, contact problem, tire

Based on mixed finite-element approximations, a numerical algorithm is developed for solving a geometrically nonlinear contact problem for a prestressed multilayered Timoshenko-type shell undergoing arbitrarily large displacements and rotations. As unknowns, the six displacements of faces of the shell are taken, which allows one to use principally new relationships for components of the Green–Lagrange strain tensor in curvilinear orthogonal coordinates, exactly representing arbitrarily large displacements of the shell as a rigid body. As an example, a tire interacting with a rigid foundation is considered.

Ключевые слова: оболочка многослойная, метод конечных элементов, задача контактная, шина

Разработан алгоритм численного решения геометрически нелинейной контактной задачи для предварительно напряженной многослойной анизотропной оболочки типа Тимошенко, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций. В качестве искоемых функций выбраны шесть перемещений лицевых поверхностей оболочки, что позволяет использовать принципиально новые соотношения для тензора деформаций Грина—Лагранжа в криволинейных ортогональных координатах, точно представляющие произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела. Рассмотрен пример расчета шины, взаимодействующей с жестким основанием.

Введение

Проблема разработки численных алгоритмов и программного обеспечения, предназначенного для решения контактных задач для многослойных композитных оболочек вращения с приложением к шинам, имеющим ярко выраженную неоднородность физико-механических свойств на макроскопическом уровне, еще не является окончательно решенной. Пространственный характер полей напряжений и деформаций в условиях анизотропии достаточно общего вида обуславливает необходимость значительного усложнения задачи для получения приемлемых результатов [1]. Получивший распространение в последние годы экстенсивный путь расчета шин на основе пространственной теории упругости за счет повышения дискретности представления шины в методе конечных элементов имеет значение при проведении контрольных расчетов уже спроектированных шин с целью окончательной отработки их конструктивной схемы [2, 3]. Начальный же этап проектирования шин следует осуществлять по быстродействующим программам, в основу которых положены различные по сложности оболочечные модели, ориентированные на использование персональных компьютеров.

К сожалению, в последние годы современные достижения теории композитных оболочек были использованы для решения задач контактного взаимодействия шин лишь в нескольких работах [4—6]. При этом поперечное обжатие шины не учитывалось. Кроме того, авторам практически неизвестны результаты численного исследования влияния эффекта анизотропии на область контакта шины с основанием и на распределение контактного давления. Некоторые экспериментальные и предварительные расчетные данные [7] указывают на то, что область контакта является несимметричной. Решению этих вопросов и посвящена данная работа.

Рассмотрим тонкую оболочку, составленную из N упругих анизотропных слоев с начальными напряжениями. Под начальными понимаем такие напряжения, которые возникают в оболочке в исходном состоянии, т. е. перед началом интересующей нас деформации. Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная отсчетной поверхности. В качестве отсчетной поверхности S примем внутреннюю поверхность какого-либо k -го слоя или поверхность контакта слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату α_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S (рис. 1).

Пусть e_1 и e_2 — единичные векторы касательных к координатным линиям α_1 и α_2 ; e_3 — единичный вектор нормали; A_α — параметры Ламе; k_α — кривизны координатных линий; h — полная толщина оболочки; h_k — толщина k -го слоя; δ_k — расстояние от поверхности S до верхней граничной поверхности k -го слоя S_k ; u_i — перемещения точек оболочки; ε_{ij}^{GL} — компоненты тензора деформаций Грина—Лагранжа; ε_{ij}^{AS} — компоненты независимого

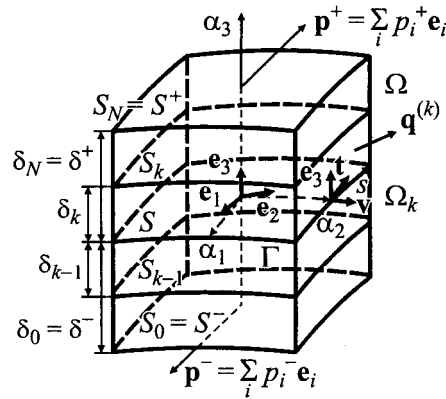


Рис. 1. Схема многослойной оболочки.

Fig. 1. Scheme of a multilayered shell.

от перемещений тензора деформаций; $\tau_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора начальных напряжений Коши k -го слоя; $S_{ij}^{(k)}$ — компоненты симметричного тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа k -го слоя; $b_{ijlm}^{(k)}$ — жесткости k -го слоя; p_i^- и p_i^+ — внешние поверхностные нагрузки, действующие на внутренней S^- и внешней S^+ лицевых поверхностях оболочки; $\mathbf{q}^{(k)} = q_v^{(k)} \mathbf{v} + q_t^{(k)} \mathbf{t} + q_3^{(k)} \mathbf{e}_3$ — вектор внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности k -го слоя Ω_k ; \mathbf{v} и \mathbf{t} — нормальный и тангенциальный единичные векторы к граничному контуру $\Gamma \subset S$. Здесь и далее $k = 1, N$; $i, j, l, m = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Постановка задачи

При построении теории многослойных анизотропных оболочек с учетом поперечного обжатия воспользуемся кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине оболочки [8, 9]

$$u_i = N^-(\alpha_3)v_i^- + N^+(\alpha_3)v_i^+, \quad (1)$$

$$N^-(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\delta^+ - \alpha_3), \quad N^+(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\alpha_3 - \delta^-),$$

где $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ — перемещения лицевых поверхностей оболочки S^\pm ; $N^\pm(\alpha_3)$ — линейные функции формы оболочки.

Вводя перемещения (1) в деформационные соотношения пространственной теории упругости [10] и полагая, что тангенциальные компоненты тензора деформаций Грина—Лагранжа изменяются по толщине оболочки со-

гласно линейному закону, приходим к деформационным соотношениям геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко [11]

$$\varepsilon_{\alpha i}^{\text{GL}} = N^-(\alpha_3)(e_{\alpha i}^- + \eta_{\alpha i}^-) + N^+(\alpha_3)(e_{\alpha i}^+ + \eta_{\alpha i}^+), \quad \varepsilon_{33}^{\text{GL}} = e_{33} + \eta_{33}. \quad (2)$$

Здесь

$$e_{\alpha\alpha}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_{\alpha}^{\pm}} \lambda_{\alpha}^{\pm}, \quad 2e_{12}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_1^{\pm}} \omega_1^{\pm} + \frac{1}{\zeta_2^{\pm}} \omega_2^{\pm}, \quad 2e_{\alpha 3}^{\pm} = \frac{\zeta_{\alpha}^{\pm}}{\zeta_{\alpha}} \beta_{\alpha} - \frac{1}{\zeta_{\alpha}} \theta_{\alpha}^{\pm}, \quad e_{33} = \beta_3,$$

$$\eta_{\alpha\alpha}^{\pm} = \frac{1}{2(\zeta_{\alpha}^{\pm})^2} [(\lambda_{\alpha}^{\pm})^2 + (\omega_{\alpha}^{\pm})^2 + (\theta_{\alpha}^{\pm})^2],$$

$$2\eta_{12}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_1^{\pm} \zeta_2^{\pm}} (\lambda_1^{\pm} \omega_2^{\pm} + \lambda_2^{\pm} \omega_1^{\pm} + \theta_1^{\pm} \theta_2^{\pm}), \quad (3)$$

$$2\eta_{\alpha 3}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_{\alpha}} (\beta_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{\pm} + \beta_{\gamma} \omega_{\alpha}^{\pm} - \beta_3 \theta_{\alpha}^{\pm}), \quad \eta_{33} = \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2),$$

$$\lambda_{\alpha}^{\pm} = \frac{1}{A_{\alpha}} v_{\alpha, \alpha}^{\pm} + B_{\gamma} v_{\gamma}^{\pm} + k_{\alpha} v_3^{\pm}, \quad \omega_{\alpha}^{\pm} = \frac{1}{A_{\alpha}} v_{\gamma, \alpha}^{\pm} - B_{\gamma} v_{\alpha}^{\pm},$$

$$\theta_{\alpha}^{\pm} = -\frac{1}{A_{\alpha}} v_{3, \alpha}^{\pm} + k_{\alpha} v_{\alpha}^{\pm}, \quad \beta_i = \frac{1}{h} (v_i^+ - v_i^-), \quad B_{\alpha} = \frac{1}{A_1 A_2} A_{\gamma, \alpha} \quad (\gamma \neq \alpha),$$

$$\zeta_{\alpha}^{\pm} = 1 + k_{\alpha} \delta^{\pm}, \quad \bar{\zeta}_{\alpha} = 1 + k_{\alpha} \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} = \frac{1}{2} (\delta^- + \delta^+),$$

где $\bar{\delta}$ — расстояние от поверхности S до срединной поверхности \bar{S} , а нижний индекс, следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координатам α_1 и α_2 . Деформационные соотношения (2), (3) весьма привлекательны с точки зрения их использования в методе конечных элементов, поскольку они *точно* представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела. Доказательство этого фундаментального факта дано в работе [12].

Приступим к формулировке контактных условий. Предположим для определенности, что контакт оболочки с абсолютно жестким плоским основанием осуществляется по части внешней поверхности оболочки S_c^+ , причем трение в области контакта отсутствует. Условия непроникания контактирующих тел и неположительности контактного давления q_c^+ запишем в виде

$$g^+ - \left(\sum_i v_i^+ \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad q_c^+ \leq 0, \quad (4)$$

где $g^+(\alpha_1, \alpha_2)$ — начальный зазор, т. е. кратчайшее расстояние от некоторой точки оболочки $M^+(\alpha_1, \alpha_2)$, принадлежащей поверхности предполагаемого контакта S_c^+ , до основания; $\mathbf{n} = \sum_i n_i \mathbf{e}_i$ — единичный вектор нормали к плоскости основания.

Неравенства (4) необходимо дополнить условием того, что контактное давление определяется в точках, которые вступают в контакт с основанием, т. е. должно выполняться равенство

$$q_c^+ \left(g^+ - \sum_i n_i v_i^+ \right) = 0. \quad (5)$$

Функционал Ху—Васидзу

Для решения задачи контактного взаимодействия предварительно напряженной оболочки с абсолютно жестким основанием введем независимый от перемещений тензор деформаций, тангенциальные и сдвиговые компоненты которого изменяются по толщине оболочки согласно линейному закону

$$\varepsilon_{ai}^{AS} = N^-(\alpha_3) E_{ai}^- + N^+(\alpha_3) E_{ai}^+, \quad \varepsilon_{33}^{AS} = E_{33}, \quad (6)$$

и, учитывая аппроксимации (1), (2), представим смешанный вариационный принцип Ху—Васидзу из работ [11, 13] в виде

$$\delta J_{HW} - \delta J_c = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta J_c = & \iint_{S_c^+} \left[\left(g^+ - \mathbf{m}^T \mathbf{v} - \frac{1}{\varepsilon} \lambda \right) \delta \lambda - \lambda \mathbf{m}^T \delta \mathbf{v} \right] \bar{\mu} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ \delta J_{HW} = & \left[\iint_{\bar{S}} (\mathbf{H} - \mathbf{DE})^T \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e} - \boldsymbol{\eta})^T \delta \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \delta \mathbf{e} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{H}^0 + \mathbf{H})^T \delta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{P}^T \delta \mathbf{v} \right] \bar{\mu} d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\bar{\Gamma}} \hat{\mathbf{H}}_T^T \delta \mathbf{v}_T (1 + k_N \bar{\delta}) ds, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_1^- \ v_1^+ \ v_2^- \ v_2^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \quad \mathbf{v}_\Gamma = [v_v^- \ v_v^+ \ v_t^- \ v_t^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \\ \mathbf{E} &= [E_{11}^- \ E_{11}^+ \ E_{22}^- \ E_{22}^+ \ 2E_{12}^- \ 2E_{12}^+ \ 2E_{13}^- \ 2E_{13}^+ \ 2E_{23}^- \ 2E_{23}^+ \ E_{33}]^T, \\ \mathbf{e} &= [e_{11}^- \ e_{11}^+ \ e_{22}^- \ e_{22}^+ \ 2e_{12}^- \ 2e_{12}^+ \ 2e_{13}^- \ 2e_{13}^+ \ 2e_{23}^- \ 2e_{23}^+ \ e_{33}]^T, \\ \boldsymbol{\eta} &= [\eta_{11}^- \ \eta_{11}^+ \ \eta_{22}^- \ \eta_{22}^+ \ 2\eta_{12}^- \ 2\eta_{12}^+ \ 2\eta_{13}^- \ 2\eta_{13}^+ \ 2\eta_{23}^- \ 2\eta_{23}^+ \ \eta_{33}]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{H}^0 = [H_{11}^{0-} \ H_{11}^{0+} \ H_{22}^{0-} \ H_{22}^{0+} \ H_{12}^{0-} \ H_{12}^{0+} \ H_{13}^{0-} \ H_{13}^{0+} \ H_{23}^{0-} \ H_{23}^{0+} \ H_{33}^0]^T,$$

$$\mathbf{H} = [H_{11}^- \ H_{11}^+ \ H_{22}^- \ H_{22}^+ \ H_{12}^- \ H_{12}^+ \ H_{13}^- \ H_{13}^+ \ H_{23}^- \ H_{23}^+ \ H_{33}]^T,$$

$$\hat{\mathbf{H}}_\Gamma = [\hat{H}_{vv}^- \ \hat{H}_{vv}^+ \ \hat{H}_{vt}^- \ \hat{H}_{vt}^+ \ \hat{H}_{v3}^- \ \hat{H}_{v3}^+]^T, \quad \mathbf{P} = [-p_1^- \ p_1^+ \ -p_2^- \ p_2^+ \ -p_3^- \ p_3^+]^T,$$

$$\mathbf{m} = [0 \ n_1 \ 0 \ n_2 \ 0 \ n_3]^T, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} = A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2.$$

В соотношениях (8) введены следующие обозначения: λ — множитель Лагранжа (контактное давление для случая плоского основания); ε — регуляризационный параметр; k_N — нормальная кривизна контура $\Gamma \subset S$; \mathbf{v} — столбец перемещений; \mathbf{v}_Γ — столбец перемещений лицевых поверхностей оболочки в системе координат v, t, α_3 , связанной с граничным контуром $\bar{\Gamma} \subset \bar{S}$; \mathbf{E} — столбец независимо введенных деформаций; \mathbf{e} и $\boldsymbol{\eta}$ — столбцы, характеризующие линейные и нелинейные составляющие тензора деформаций Грина—Лагранжа; \mathbf{P} — столбец поверхностных нагрузок; \mathbf{D} — несимметричная матрица коэффициентов упругости размером 11×11 , элементы которой определяются на основе допущений [8, 9] с целью преодоления пурассоновского заклинивания; \mathbf{H} — столбец результирующих напряжений, \mathbf{H}^0 — столбец результирующих начальных напряжений; $\hat{\mathbf{H}}_\Gamma$ — столбец результирующих внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности оболочки Ω , определяемых по формулам

$$D_{ijlm}^{pq} = \sum_k \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{ijlm}^{(k)} [N^-(\alpha_3)]^{2-p-q} [N^+(\alpha_3)]^{p+q} d\alpha_3 \quad (p, q = 0, 1), \quad (9)$$

$$H_{\alpha i}^\pm = \sum_k \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{\alpha i}^{(k)} N^\pm(\alpha_3) d\alpha_3, \quad H_{33} = \sum_k \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{33}^{(k)} d\alpha_3,$$

$$H_{\alpha i}^{0\pm} = \sum_k \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \tau_{\alpha i}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad H_{33}^0 = \sum_k \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \tau_{33}^{(k)} d\alpha_3, \quad (9)$$

$$\hat{H}_{\nu\kappa}^{\pm} = \sum_k \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} q_{\nu\kappa}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3 \quad (\kappa = \nu, t, 3).$$

При этом в формулах (9) следует принять $b_{\alpha\beta\gamma 3}^{(k)} = b_{\alpha 333}^{(k)} = 0$. Отметим, что смешанное вариационное уравнение (7), (8) обобщает соответствующие уравнения, приведенные в работах [11, 13].

Алгоритм численного решения контактной задачи

В вариационном уравнении (7) вектор-функции \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{H} и множитель Лагранжа λ являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на каждом конечном элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений и множителя Лагранжа воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r(\xi_1, \xi_2) \mathbf{v}_r, \quad \lambda = \sum_r N_r(\xi_1, \xi_2) \lambda_r, \quad (10)$$

где $\mathbf{v}_r = [v_{1r}^- \ v_{1r}^+ \ v_{2r}^- \ v_{2r}^+ \ v_{3r}^- \ v_{3r}^+]^T$ — столбцы узловых перемещений; λ_r — значения множителя Лагранжа в узлах элемента; $N_r(\xi_1, \xi_2)$ — линейные функции формы; $\xi_{\gamma} = (\alpha_{\gamma} - d_{\gamma}^{\text{el}}) / l_{\gamma}^{\text{el}}$ — нормализованные криволинейные координаты элемента; d_{γ}^{el} — координаты центра элемента; $2l_{\gamma}^{\text{el}}$ — длины сторон элемента; $r = \overline{1, 4}$.

Для деформаций и результирующих напряжений согласно методу двойной аппроксимации [14, 15], обобщенному на случай учета геометрической нелинейности и поперечного обжатия [11, 12], имеем еще более простые формулы

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad \mathbf{H} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}^0 = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{0 r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}.$$

Здесь

$$\mathbf{E}^{00} = [E_{11}^{-00} \ E_{11}^{+00} \ E_{22}^{-00} \ E_{22}^{+00} \ 2E_{12}^{-00} \ 2E_{12}^{+00} \ 2E_{13}^{-00} \ 2E_{13}^{+00} \ 2E_{23}^{-00} \ 2E_{23}^{+00} \ E_{33}^{00}]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{E}^{01} = [E_{11}^{-01} \ E_{11}^{+01} \ 2E_{13}^{-01} \ 2E_{13}^{+01} \ E_{33}^{01}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{10} = [E_{22}^{-10} \ E_{22}^{+10} \ 2E_{23}^{-10} \ 2E_{23}^{+10} \ E_{33}^{10}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{11}], \quad \mathbf{H}^{11} = [H_{33}^{11}],$$

$$\mathbf{H}^{00} = [H_{11}^{-00} \ H_{11}^{+00} \ H_{22}^{-00} \ H_{22}^{+00} \ H_{12}^{-00} \ H_{12}^{+00} \ H_{13}^{-00} \ H_{13}^{+00} \ H_{23}^{-00} \ H_{23}^{+00} \ H_{33}^{00}]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{H}^{01} = [H_{11}^{-01} \ H_{11}^{+01} \ H_{13}^{-01} \ H_{13}^{+01} \ H_{33}^{01}]^T,$$

$$\mathbf{H}^{10} = [H_{22}^{-10} \ H_{22}^{+10} \ H_{23}^{-10} \ H_{23}^{+10} \ H_{33}^{10}]^T,$$

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{Q}^{00} — единичная матрица размером 11×11 , а столбцы $\mathbf{H}^{0r_1 r_2}$ определяются аналогично $\mathbf{H}^{r_1 r_2}$. Здесь и далее индексы r_1, r_2 принимают значения 0 или 1.

Вводя аппроксимации (10)—(12) в вариационное уравнение (7), (8) и пользуясь стандартной процедурой смешанной модели метода конечных элементов, приходим к следующим уравнениям равновесия элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T (\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (13)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [(\mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} + 2(\mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{0r_1 r_2} + \mathbf{L}^{r_1 r_2} \mathbf{\Lambda}] = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{V} = [v_1^T \ v_2^T \ v_3^T \ v_4^T]^T$ — столбец узловых перемещений элемента; $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^T$ — столбец узловых значений множителя Лагранжа; \mathbf{F} — столбец узловых нагрузок; $\mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2}$ — матрицы размером 24×4 , отвечающие контактному взаимодействию элемента; $\mathbf{B}^{\eta_1 \eta_2}$ — матрицы размером 11×24 , характеризующие линейные составляющие тензора деформаций Грина—Лагранжа; $\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2}$ — трехмерные массивы размером $11 \times 24 \times 24$, характеризующие нелинейные составляющие тензора деформаций Грина—Лагранжа; $\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{V}$ — матрицы размером 11×24 , элементы которых вычисляются по формулам

$$(\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{V})_{np} = \sum_q \mathbf{R}_{npq}^{\eta_1 \eta_2} v_q, \quad \mathbf{R}_{npq}^{\eta_1 \eta_2} = \mathbf{R}_{nqp}^{\eta_1 \eta_2} \quad (n = \overline{1, 11}; \quad p, q = \overline{1, 24}).$$

Дополним уравнения (13) соотношениями, отвечающими согласно формулам (4), (5) за выполнение условий контакта. В зоне контакта ($\rho \in I_c$, где $I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$) должны выполняться условия

$$g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho - \frac{1}{\varepsilon} \lambda_\rho = 0, \tag{14.1}$$

$$\lambda_\rho \leq 0, \tag{14.2}$$

а вне зоны контакта ($\rho \notin I_c$) — условия

$$g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho \geq 0, \tag{15.1}$$

$$\lambda_\rho = 0, \tag{15.2}$$

где g_r^+ — значения зазора в узлах элемента; $\mathbf{m}_r = [0 \ n_{1r} \ 0 \ n_{2r} \ 0 \ n_{3r}]^T$ — столбцы, характеризующие единичные векторы нормали к плоскости основания в узлах элемента.

Исключая в соотношениях (13) столбцы $\mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2}$ и $\mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2}$, приходим к системе нелинейных уравнений

$$\sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} [(\mathbf{B}^{\eta_1 \eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \times \\ \times (\mathbf{B}^{\eta_1 \eta_2} + \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{V}) \mathbf{V} + 2(\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{H}^{0\eta_1 \eta_2} + \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{\Lambda}] = \mathbf{F}, \tag{16}$$

которую следует решать совместно с условиями (14), (15).

Далее используется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль с получением системы нелинейных уравнений относительно глобального вектора узловых перемещений, на которой здесь останавливаться не будем.

Для решения задачи был применен метод проб и ошибок, суть которого заключается в следующем. Вначале задается начальное приближение зоны контакта и решается методом Ньютона—Рафсона нелинейная система уравнений (14.1), (15.2), (16), затем для каждого узла проверяется выполнение неравенств (14.2), (15.1). Если неравенство (14.2) не выполняется, то узел выводится из зоны контакта. В случае, если не выполняется неравенство (15.1), то узел добавляется к зоне контакта.

Численные результаты и их обсуждение

В качестве примера рассмотрим задачу об обжатии четырехслойной перекрестно армированной резинокордной торообразной оболочки кругового поперечного сечения на жесткое основание (рис. 2). С помощью этой оболочки будем моделировать диагональную шину. Исходные характеристики элементарных резинокордных слоев выбираем следующими [16]: $E_L = 510,45$ МПа, $E_T = 6,91$ МПа, $G_{LT} = 2,33$ МПа, $G_{TT} = 1,77$ МПа, $\nu_{LT} = 0,46$, $\nu_{TT} = 0,95$, где индексы L и T соответствуют направлению армирования и поперечному направлению. Пусть толщина элементарного резинокордного слоя $h_k = 1,2$ мм, полная толщина оболочки $h = 4,8$ мм, ориентация резинокордных слоев $\gamma_k = (-1)^{k-1}\gamma$, где $\gamma = 52^\circ$ и $k = \overline{1,4}$. В качестве отсчетной поверхности примем внутреннюю поверхность шины, которая образована вращением окружности радиусом $R_1 = 50$ мм. Расстояние от оси вращения до экватора отсчетной поверхности шины $R_0 = 250$ мм. При численных рас-

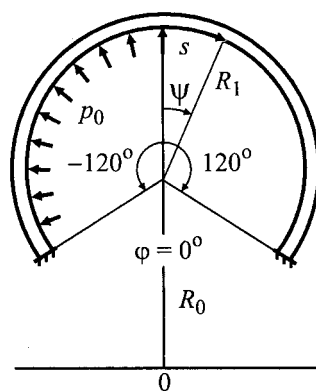


Рис. 2. Схема перекрестно армированной тороидальной оболочки (диагональная шина).

Fig. 2. Angle-ply toroidal shell (bias tire).

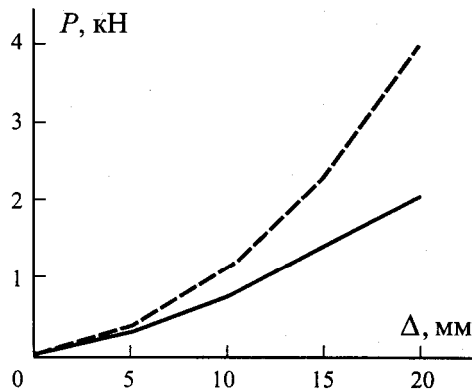


Рис. 3. Кривая нагрузка—прогиб P — Δ для диагональной шины в линейной (---) и нелинейной (—) постановках.

Fig. 3. Load—deflection curve P — Δ for the bias tire in linear (---) and nonlinear (—) formulations.

четах предполагали, что сечения шины с координатами $\psi = \pm 120^\circ$ жестко заземлены.

Сначала шину рассчитывали на действие внутреннего давления $p_0 = 0,15$ МПа на основе численного алгоритма, изложенного в работе [12]. Затем решали контактную задачу с использованием изложенного алгоритма. Отметим, что вследствие анизотропии условия симметрии не учитывали и были использованы нерегулярные сетки 42×40 элементов в меридиональном и окружном направлениях. Для параметра регуляризации было выбрано оптимальное для данного класса задач значение $\varepsilon = 10^4$. Результаты чис-

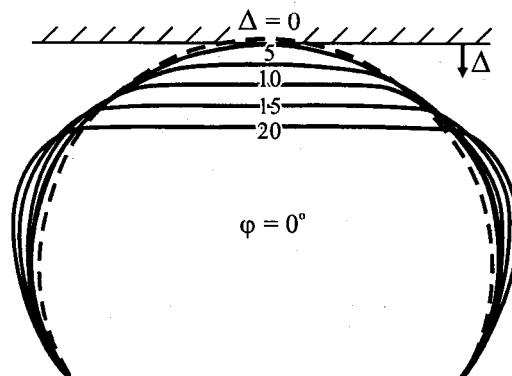


Рис. 4. Деформированные профили диагональной шины при $\varphi = 0^\circ$ и разных значениях параметра Δ (цифры у кривых).

Fig. 4. Deformed profiles of the bias tire at $\varphi = 0^\circ$ and different values of Δ (numbers at the curves).

Распределение контактного давления $-10q_c^+$ (МПа) по области контакта при $\Delta = 20$ мм для различных значений φ (град)

φ , град	-45	-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
-40							1,37	2,07	2,24	2,49	2,31	2,18	1,52	0,30					
-35				1,32	2,58	3,34	2,64	2,86	2,37	2,75	2,42	2,88	2,78	3,27	2,93	1,69			
-30			2,84	2,70	2,55	2,17	2,31	2,11	2,24	2,10	2,26	2,16	2,32	2,29	2,54	2,78	3,13		
-25		2,88	2,39	2,30	2,14	2,09	1,96	1,96	1,89	1,93	1,90	1,97	1,98	2,09	2,17	2,33	2,45	3,14	
-20	2,53	2,16	2,26	2,02	1,92	1,83	1,80	1,76	1,76	1,74	1,76	1,76	1,80	1,84	1,93	2,03	2,28	2,19	2,92
-15	2,39	2,04	2,01	1,86	1,78	1,73	1,69	1,67	1,66	1,66	1,66	1,67	1,69	1,73	1,79	1,86	2,02	2,04	2,46
-10	2,31	1,87	1,90	1,77	1,70	1,66	1,63	1,61	1,61	1,60	1,60	1,61	1,63	1,66	1,70	1,78	1,90	1,86	2,38
-5	2,21	1,82	1,83	1,72	1,66	1,63	1,60	1,59	1,58	1,57	1,58	1,58	1,60	1,62	1,66	1,72	1,83	1,81	2,24
0	2,20	1,79	1,82	1,70	1,65	1,62	1,59	1,58	1,57	1,56	1,57	1,58	1,59	1,62	1,65	1,70	1,82	1,79	2,20
5	2,24	1,81	1,83	1,72	1,66	1,62	1,60	1,58	1,58	1,57	1,58	1,59	1,60	1,63	1,66	1,72	1,83	1,82	2,21
10	2,38	1,86	1,90	1,78	1,70	1,66	1,63	1,61	1,60	1,60	1,61	1,61	1,63	1,66	1,70	1,77	1,90	1,87	2,31
15	2,46	2,04	2,02	1,86	1,79	1,73	1,69	1,67	1,66	1,66	1,66	1,67	1,69	1,73	1,78	1,86	2,01	2,04	2,39
20	2,92	2,19	2,28	2,03	1,93	1,84	1,80	1,76	1,76	1,74	1,76	1,76	1,80	1,83	1,92	2,02	2,26	2,16	2,53
25		3,14	2,45	2,33	2,17	2,09	1,98	1,97	1,90	1,93	1,89	1,96	1,96	2,09	2,14	2,30	2,39	2,88	
30			3,13	2,78	2,54	2,29	2,32	2,16	2,26	2,10	2,24	2,11	2,31	2,17	2,55	2,70	2,84		
35				1,69	2,93	3,27	2,78	2,88	2,42	2,75	2,37	2,86	2,64	3,34	2,58	1,32			
40						0,30	1,52	2,18	2,31	2,49	2,24	2,07	1,37						

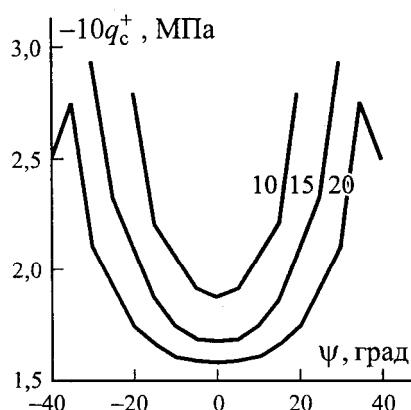


Рис. 5. Распределение контактного давления при $\varphi = 0^\circ$ и разных значениях параметра Δ (цифры у кривых).

Fig. 5. Distribution of contact pressure at $\varphi = 0^\circ$ and different values of Δ (numbers at the curves).

ленных расчетов нагрузочной характеристики шины на основе геометрически линейной (штриховая кривая) и нелинейной (сплошная кривая) теории оболочек приведены на рис. 3, где P — сила обжатия на опорную плоскость, а Δ — смещение плоскости. Как видим, использование линейной теории оболочек приводит к двукратному завышению нагрузочной характеристики шины. На рис. 4 показаны деформированные профили внешнего контура шины для центрального меридионального сечения $\varphi = 0^\circ$, где φ — окружная координата. При этом штриховой профиль соответствует ненагруженной шине. Рис. 5 иллюстрирует зависимость контактного давления q_c^+ от меридиональной координаты ψ для трех значений Δ .

Более полная информация о величине контактного давления и пятне контакта при $\Delta = 20$ мм дана в таблице, откуда видно, что условия симметрии для контактного давления в диагональной шине нарушаются. Здесь, как видим, имеет место *центральная симметрия*. И хотя влияние эффекта анизотропии на распределение контактного давления и размеры пятна контакта не столь важно для инженерных расчетов, тем не менее для механики композитных конструкций данный эффект является принципиальным.

Что касается влияния анизотропии на напряженное состояние шины, то оно, как показали расчеты, существенно. Однако в связи с ограниченным объемом работы такой анализ здесь не представлен.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Методы исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных оболочек с приложением к механике пневматических шин // Научно-технический прогресс в машиностроении. Вып. 39. — М.: МЦНТИ, Институт машиноведения РАН, 1993. — 50 с.
2. Ridha R. A. and Theves M. Advances in tire mechanics // IRC 94. — М., 1994. — Vol. 1. — P. 54—126.
3. Noor A. K. and Danielson K. T. Finite elements developed in cylindrical coordinates for three-dimensional tire analysis // Tire Sci. Technology. — 1997. — Vol. 25, No. 1. — P. 2—28.
4. Kim K. O., Tanner J. A., Noor A. K., and Robinson M. P. Computational methods for frictionless contact with application to space shuttle orbiter nose-gear tires // NASA TP-3073. — 1991.
5. Tanner J. A., Martinson V. J., and Robinson M. P. Static frictional contact of the space shuttle nose-gear tire // Tire Sci. Technology. — 1994. — Vol. 22, No. 4. — P. 242—272.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М., Плотникова С. В. Контактная задача для многослойной анизотропной оболочки вращения // Проблемы шин и резинотехники композитов. Т. 1. — М.: НИИШП, 2000. — С. 189—197.
7. Faria L. O., Oden J. T., Yavari B., Tworzydło W. W., Bass J. M., and Becker E. B. Tire modeling by finite elements // Tire Sci. Technology. — 1992. — Vol. 20, No. 1. — P. 33—56.
8. Kulikov G. M. Analysis of initially stressed multilayered shells // Int. J. Solids Structures. — 2001. — Vol. 38, No. 26—27. — P. 4535—4555.
9. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка // Механика композит. материалов. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 607—620.
10. Новожиллов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
11. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка // Механика композит. материалов. — 2002. — Т. 38, № 6. — С. 815—826.
12. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Pt I. Timoshenko—Mindlin shell theory // Computer Methods Appl. Mech. Eng. — 2003. — Vol. 192, No. 7—8. — P. 851—875.
13. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Контактная задача для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко // Прикл. математика и механика. — 2003. — Т. 67, № 6. — С. 940—953.
14. Wempner G., Talaslidis D., and Hwang C. M. A simple and efficient approximation of shells via finite quadrilateral elements // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1982. — Vol. 49, No. 1. — P. 115—120.
15. Голованов А. И., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. — Казань: КФТИ АН СССР, 1989. — 269 с.
16. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.

Поступила в редакцию 08.03.2004
Received March 8, 2004