

*Г. М. Куликов, С. В. Плотникова*

*Тамбовский государственный технический университет, Россия*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ  
МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ПОСТАНОВКА<sup>1</sup>**

*G. M. Kulikov and S. V. Plotnikova*

**INVESTIGATION OF LOCALLY LOADED MULTILAYER SHELLS  
BY A MIXED FINITE-ELEMENT METHOD  
2. GEOMETRICALLY NONLINEAR STATEMENT**

**Keywords:** multilayer shell, finite-element method, mixed model, rubber-cord composite

Based on mixed finite-element approximations, a numerical algorithm is developed for solving linear static problems of prestressed multilayer composite shells subjected to large displacements and arbitrarily large rotations. As the sought-for functions, six displacements and eleven strains of the shell faces are chosen, which allows us to use nonlinear deformation relationships exactly representing arbitrarily large displacements of the shell as a rigid body. The stiffness matrix of a shell element has a proper rank and is calculated based on exact analytical integration. The bilinear element developed does not allow false rigid displacements and is not subjected to the membrane, shear, or Poisson locking phenomenon. The results of solving the well-known test problem on a nonsymmetrically fixed circular arch subjected to a concentrated load and the problem on a locally loaded toroidal multilayer rubber-cord shell are presented.

**Ключевые слова:** оболочка многослойная, метод конечных элементов, модель смешанная, композит резинокордный

Разработан алгоритм численного решения задач статики предварительно напряженных многослойных анизотропных оболочек, подверженных большому перемещению и произвольно большому поворотам, на основе смешанных конечно-элементных аппроксимаций. В качестве искоемых функций выбраны шесть перемещений и 11 деформаций лицевых поверхностей оболочки, что позволило использовать нелинейные деформационные соотношения, точно представляющие произвольно большие переме-

---

<sup>1</sup>Сообщение 1 см. [1].

щения элемента оболочки как жесткого целого. Матрица жесткости элемента имеет корректный ранг и вычисляется на основе точного аналитического интегрирования. Разработанный билинейный элемент не допускает ложных жестких смещений и не подвержен мембранному, сдвиговому и пуассоновскому заклиниваниям. Приведены результаты решения известной тестовой задачи о нагружении сосредоточенной силой несимметрично закрепленной круговой арки и задачи локального нагружения многослойной резинокордной торообразной оболочки.

### Введение

В работе [1] построен алгоритм численного решения линейных задач статики предварительно напряженных многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко с учетом поперечного обжатия. В основу алгоритма положен смешанный элемент TMS4, обладающий рядом ценных для расчета оболочек с высокой степенью локализации нагрузки свойств. В связи с использованием в [1] “чистых” деформационных соотношений матрица жесткости элемента имеет шесть нулевых собственных значений, что необходимо для точного представления малых перемещений элемента как жесткого целого. В результате элемент не допускает ложных жестких смещений (механизмов) и не подвержен мембранному и сдвиговому заклиниваниям [2, 3].

В настоящей работе разработан более общий алгоритм численного решения геометрически нелинейных задач статики предварительно напряженных многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко на основе смешанной модели МКЭ. В результате использования нелинейных деформационных соотношений, точно представляющих произвольно большие перемещения оболочки как жесткого целого, матрица жесткости построенного билинейного элемента TMS4n имеет корректный ранг. Поэтому элемент, как и его линейный аналог TMS4, не допускает ложных жестких смещений и не подвержен мембранному, сдвиговому и пуассоновскому заклиниваниям. Последнее возникает при учете поперечного обжатия в случае преобладания изгибного напряженного состояния, и этот эффект усиливается при решении задач в геометрически нелинейной постановке [4—6].

### Функционал Ху—Васидзу

Введем в функционал Ху—Васидзу геометрически нелинейной теории упругости [7] независимые аппроксимации перемещений и деформаций (см. формулы (1), (2) в [1]) и, полагая, что метрики лицевых поверхностей оболочки  $S^\pm$  эквивалентны метрике отсчетной поверхности  $S$ , приходим к формуле для вариации функционала Ху—Васидзу для предварительно напряженной многослойной анизотропной оболочки, подверженной большим перемещениям и произвольно большим поворотам:

$$\delta J = - \iint_S \left\{ \sum_{\alpha \leq i} \left[ H_{\alpha i}^- - \sum_{\beta \leq j} (D_{\alpha i \beta j}^{00} E_{\beta j}^- + D_{\alpha i \beta j}^{01} E_{\beta j}^+) \right] - \frac{D_{\alpha i 33}^-}{E_{33}} E_{33} \right\} \delta E_{\alpha i}^- +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha \leq i} \left[ H_{\alpha i}^+ - \sum_{\beta \leq j} (D_{\alpha i \beta j}^{01} E_{\beta j}^- + D_{\alpha i \beta j}^{11} E_{\beta j}^+) - \frac{D_{\alpha i 33}^+ E_{33}}{\alpha i 33} \right] \delta E_{\alpha i}^+ + \\
 & + \left[ H_{33} - \sum_{\beta \leq j} (D_{33 \beta j}^- E_{\beta j}^- + D_{33 \beta j}^+ E_{\beta j}^+) - D_{3333} E_{33} \right] \delta E_{33} + \\
 & + \sum_{\alpha \leq i} [(E_{\alpha i}^- - e_{\alpha i}^- - \eta_{\alpha i}^-) \delta H_{\alpha i}^- + (E_{\alpha i}^+ - e_{\alpha i}^+ - \eta_{\alpha i}^+) \delta H_{\alpha i}^+ - H_{\alpha i}^- \delta e_{\alpha i}^- - H_{\alpha i}^+ \delta e_{\alpha i}^+ - \\
 & - (L_{\alpha i}^- + H_{\alpha i}^-) \delta \eta_{\alpha i}^- - (L_{\alpha i}^+ + H_{\alpha i}^+) \delta \eta_{\alpha i}^+] + (E_{33} - e_{33} - \eta_{33}) \delta H_{33} - H_{33} \delta e_{33} - \\
 & - (L_{33} + H_{33}) \delta \eta_{33} + \sum_i (p_i^+ \delta v_i^+ - p_i^- \delta v_i^-) \left. \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
 & - \oint_{\Gamma} (\hat{H}_{vv}^- \delta v_v^- + \hat{H}_{vv}^+ \delta v_v^+ + \hat{H}_{vt}^- \delta v_t^- + \hat{H}_{vt}^+ \delta v_t^+ + \hat{H}_{v3}^- \delta v_3^- + \hat{H}_{v3}^+ \delta v_3^+) ds.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначения, используемые здесь и далее, соответствуют приведенным в работе [1]:  $e_{\alpha i}^{\pm}$ ,  $e_{33}$  и  $\eta_{\alpha i}^{\pm}$ ,  $\eta_{33}$  — линейные и нелинейные составляющие тензора деформаций Грина—Лагранжа (см. формулы (4) в [1]), а индексные переменные принимают значения  $i, j, l, m = 1, 2, 3$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ . Здесь, однако, в отличие от работы [1] результирующие напряжений имеют иной механический смысл:  $H_{\alpha i}^{\pm}$ ,  $H_{33}$  — результирующие симметричного тензора напряжений Пиола—Кирхгофа;  $L_{\alpha i}^{\pm}$ ,  $L_{33}$  — результирующие тензора начальных напряжений Коши, определяемые по формулам

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha i}^{\pm} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{\alpha i}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, & H_{33} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{33}^{(k)} d\alpha_3, \\
 L_{\alpha i}^{\pm} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \tau_{\alpha i}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, & L_{33} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \tau_{33}^{(k)} d\alpha_3,
 \end{aligned}$$

где  $N^{\pm}(\alpha_3)$  — линейные функции формы [1].

При вычислении компонент тензора напряжений Пиола—Кирхгофа могут быть использованы полные соотношения обобщенного закона Гука

$$S_{ij}^{(k)} = \sum_{l,m} b_{ijlm}^{(k)} \varepsilon_{lm}, \quad b_{\alpha\beta\gamma 3}^{(k)} = b_{\alpha 333}^{(k)} = 0,$$

где  $b_{ijlm}^{(k)}$  — жесткости  $k$ -го слоя оболочки. Однако при расчете оболочки из несжимаемых или близких к ним по характеристикам материалов, у которых коэффициенты Пуассона слоев близки к 0,5 [8], а также с целью преодоления пуассоновского заклинивания [6] следует приближенно полагать  $b_{\alpha\beta 33}^{(k)} = 0$ . Это означает, что подчеркнутые члены в формуле для вариации функционала Ху—Васидзу (1) можно опустить [1], поскольку

$$D_{\alpha\beta 33}^{\pm} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{\alpha\beta 33}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3.$$

Отметим, что функционал (1) обобщает соответствующие функционалы Ху—Васидзу многослойных оболочек, приведенные в работах [1, 9, 10].

### Алгоритм численного решения геометрически нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек

Рассмотрим задачу локального нагружения предварительно напряженной многослойной анизотропной оболочки в геометрически нелинейной постановке. Можно доказать [9, 10], что используемые нелинейные деформационные соотношения точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого целого. Это свойство деформационных соотношений является принципиальным при расчете оболочек с высокой степенью локализации нагрузки, в том числе подверженных сосредоточенным воздействиям.

Представим вариацию функционала Ху—Васидзу (1) в матричной форме

$$\begin{aligned} \delta J^{el} = & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{H} - \mathbf{DE})^T \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e} - \boldsymbol{\eta})^T \delta \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \delta \mathbf{e} - (\mathbf{L} + \mathbf{H})^T \delta \boldsymbol{\eta} + \\ & + \mathbf{P}^T \delta \mathbf{v}] \wedge d\xi_1 d\xi_2 - \oint_{\Gamma^{el}} \hat{\mathbf{H}}_{\Gamma}^T \delta \mathbf{v}_{\Gamma} ds, \\ \mathbf{v} = & [v_1^- \ v_1^+ \ v_2^- \ v_2^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \quad \mathbf{v}_{\Gamma} = [v_v^- \ v_v^+ \ v_t^- \ v_t^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \\ \mathbf{P} = & [-p_1^- \ p_1^+ \ -p_2^- \ p_2^+ \ -p_3^- \ p_3^+]^T, \\ \hat{\mathbf{H}}_{\Gamma} = & [\hat{H}_{vv}^- \ \hat{H}_{vv}^+ \ \hat{H}_{vt}^- \ \hat{H}_{vt}^+ \ \hat{H}_{v3}^- \ \hat{H}_{v3}^+]^T, \\ \mathbf{e} = & [e_{11}^- \ e_{11}^+ \ e_{22}^- \ e_{22}^+ \ e_{12}^- \ e_{12}^+ \ e_{13}^- \ e_{13}^+ \ e_{23}^- \ e_{23}^+ \ e_{33}^- \ e_{33}^+]^T, \\ \boldsymbol{\eta} = & [\eta_{11}^- \ \eta_{11}^+ \ \eta_{22}^- \ \eta_{22}^+ \ \eta_{12}^- \ \eta_{12}^+ \ \eta_{13}^- \ \eta_{13}^+ \ \eta_{23}^- \ \eta_{23}^+ \ \eta_{33}^- \ \eta_{33}^+]^T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = [E_{11}^- E_{11}^+ E_{22}^- E_{22}^+ E_{12}^- E_{12}^+ E_{13}^- E_{13}^+ E_{23}^- E_{23}^+ E_{33}^- E_{33}^+]^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = [H_{11}^- H_{11}^+ H_{22}^- H_{22}^+ H_{12}^- H_{12}^+ H_{13}^- H_{13}^+ H_{23}^- H_{23}^+ H_{33}^- H_{33}^+]^T,$$

$$\mathbf{L} = [L_{11}^- L_{11}^+ L_{22}^- L_{22}^+ L_{12}^- L_{12}^+ L_{13}^- L_{13}^+ L_{23}^- L_{23}^+ L_{33}^- L_{33}^+]^T,$$

где  $\xi_1, \xi_2$  — локальные координаты элемента;  $\Lambda(\xi_1, \xi_2)$  — функция, характеризующая метрику элемента;  $\mathbf{v}$  — вектор перемещений;  $\mathbf{v}_\Gamma$  — вектор перемещений граничного контура элемента  $\Gamma^{el}$ ;  $\mathbf{E}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}$  — векторы, характеризующие деформационные соотношения;  $\mathbf{H}$  — вектор результирующих напряжений Пиола—Кирхгофа;  $\mathbf{L}$  — вектор результирующих начальных напряжений Коши;  $\hat{\mathbf{H}}_\Gamma$  — вектор результирующих нагрузок, действующих на границе элемента  $\Gamma^{el}$ ;  $\mathbf{P}$  — вектор поверхностных нагрузок;  $\mathbf{D}$  — несимметричная матрица коэффициентов упругости размером  $11 \times 11$ , элементы которой определяются согласно работе [1].

В функционале (2) векторы  $\mathbf{v}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad (3)$$

где  $N_r(\xi_1, \xi_2)$  — линейные функции формы;  $\mathbf{v}_r = [v_{1r}^- v_{1r}^+ v_{2r}^- v_{2r}^+ v_{3r}^- v_{3r}^+]^T$  — векторы узловых перемещений ( $r = \overline{1, 4}$ ). Для деформаций и результирующих напряжений согласно методу двойной аппроксимации [11—13], обобщенному на случай учета поперечного обжатия, имеем еще более простые формулы:

$$\mathbf{E} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2} \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2},$$

$$\mathbf{E}^{00} = [E_{11}^{-00} E_{11}^{+00} E_{22}^{-00} E_{22}^{+00} E_{12}^{-00} E_{12}^{+00} E_{13}^{-00} E_{13}^{+00} E_{23}^{-00} E_{23}^{+00} E_{33}^{-00} E_{33}^{+00}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{01} = [E_{11}^{-01} E_{11}^{+01} E_{13}^{-01} E_{13}^{+01} E_{33}^{01}]^T, \quad (4a)$$

$$\mathbf{E}^{10} = [E_{22}^{-10} E_{22}^{+10} E_{23}^{-10} E_{23}^{+10} E_{33}^{10}]^T, \quad \mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{11}],$$

$$\mathbf{H} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2} \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2}, \quad (4b)$$

где  $E^{00}$  — вектор, характеризующий однородные формы деформации;  $E^{01}$ ,  $E^{10}$ ,  $E^{11}$  — векторы, характеризующие высшие формы деформации;  $Q^{00}$  — единичная матрица размером  $11 \times 11$ ;  $Q^{01}$ ,  $Q^{10}$  — матрицы размером  $11 \times 5$  и  $Q^{11}$  — матрица размером  $11 \times 1$ , введенные в работе [1] с целью более компактной записи разрешающих матричных уравнений. Смысл векторов  $H^{r_1 r_2}$  и  $L^{r_1 r_2}$  аналогичен  $E^{r_1 r_2}$ . Здесь и далее  $r_1, r_2 = 0, 1$ .

Введем перемещения (3), деформации (4а) и результирующие напряжения (4б) в формулу (2) и, применив стандартную вариационную процедуру, получим нелинейные уравнения смешанной модели МКЭ

$$E^{r_1 r_2} = (Q^{r_1 r_2})^T (B^{r_1 r_2} + R^{r_1 r_2} u) u, \quad H^{r_1 r_2} = (Q^{r_1 r_2})^T D Q^{r_1 r_2} E^{r_1 r_2}, \quad (5)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [(B^{r_1 r_2} + 2R^{r_1 r_2} u)^T Q^{r_1 r_2} H^{r_1 r_2} + 2(R^{r_1 r_2} u)^T Q^{r_1 r_2} L^{r_1 r_2}] = F,$$

где  $u = [v_1^T \ v_2^T \ v_3^T \ v_4^T]^T$  — вектор узловых перемещений элемента;  $F$  — вектор узловых нагрузок;  $B^{r_1 r_2}$  — деформационные матрицы размером  $11 \times 24$ , отвечающие линейным составляющим тензора деформации;  $R^{r_1 r_2}$  — трехмерные деформационные массивы размером  $11 \times 24 \times 24$ , отвечающие нелинейным составляющим тензора деформаций. При этом  $R^{r_1 r_2} u$  — матрицы размером  $11 \times 24$ , элементы которых вычисляются по формулам

$$(R^{r_1 r_2} u)_{pq} = \sum_s R_{pqs}^{r_1 r_2} u_s \quad (p = \overline{1, 11}; q, s = \overline{1, 24}).$$

Исключив векторы  $E^{r_1 r_2}$  и  $H^{r_1 r_2}$  в соотношениях (5), с учетом

$$D^{r_1 r_2} = Q^{r_1 r_2} (Q^{r_1 r_2})^T D Q^{r_1 r_2} (Q^{r_1 r_2})^T$$

получим разрешающее матричное уравнение равновесия элемента

$$G(u) = F, \quad (6)$$

где

$$G(u) = \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [(B^{r_1 r_2} + 2R^{r_1 r_2} u)^T D^{r_1 r_2} (B^{r_1 r_2} + R^{r_1 r_2} u) u + 2(R^{r_1 r_2} u)^T Q^{r_1 r_2} L^{r_1 r_2}].$$

Следуя [10], из уравнений (5) нетрудно вывести соотношения

$$hE_{33}^{10} = A_1 \bar{\xi}_1 (E_{13}^{+00} - E_{13}^{-00}), \quad hE_{33}^{01} = A_2 \bar{\xi}_2 (E_{23}^{+00} - E_{23}^{-00}), \quad (7)$$

$$hE_{33}^{11} = A_1 \bar{\xi}_1 (E_{13}^{+01} - E_{13}^{-01}), \quad hE_{33}^{11} = A_2 \bar{\xi}_2 (E_{23}^{+10} - E_{23}^{-10}), \quad (7)$$

которые означают, что только семь высших форм аппроксимации деформаций (например,  $E_{11}^{-01}, E_{11}^{+01}, E_{22}^{-10}, E_{22}^{+10}, E_{13}^{-01}, E_{13}^{+01}, E_{23}^{-10}$ ) из 11, введенных согласно формулам (4а), являются независимыми. Соотношения (7) обеспечивают нужное число степеней свободы, что необходимо для точного представления больших перемещений элемента как жесткого целого. Важно отметить, что матрица жесткости элемента вычисляется на основе точного аналитического интегрирования. В результате удалось построить универсальный и экономичный элемент TMS4n, который не допускает ложных жестких смещений (механизмов) и не подвержен пуассоновскому заклиниванию.

Уравнение (6) является нелинейным и для его решения применим метод Ньютона—Рафсона:

$$\mathbf{u}^{[n+1]} = \mathbf{u}^{[n]} + \left[ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{[n]}) \right]^{-1} [\mathbf{F} - \mathbf{G}(\mathbf{u}^{[n]})],$$

где  $n = 0, 1, \dots$  Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\|\mathbf{U}^{[n+1]} - \mathbf{U}^{[n]}\| < \varepsilon \|\mathbf{U}^{[n]}\|,$$

где  $\mathbf{U}$  — глобальный вектор узловых перемещений;  $\|\bullet\|$  — евклидова норма в пространстве перемещений;  $\varepsilon$  — априори заданная точность вычислений.

Разработанный нелинейный элемент TMS4n был положен в основу пакета программ TIRANA (Tire Analysis), предназначенного для использования в шинной промышленности при проектировании резинокордных композитов, в частности пневматических шин. Результаты тестовых расчетов показали высокую точность и эффективность TMS4n.

### Численные результаты и их обсуждение

В качестве первого примера рассмотрим круговую арку под действием сосредоточенной силы  $\tilde{P} = 12PR^2 / Ebh^3$  в вершине (рис. 1). Пусть левый торец арки шарнирно оперт, а правый — зашкреплен. Механико-геометрические характеристики арки [14] следующие:  $E = 2 \cdot 10^6$ ,  $\nu = 0$ ,  $R = 100$ ,  $b = 6$ ,  $h = 1$ ,  $\psi = 215^\circ$ . Эта задача привлекла внимание многих ученых с точки зрения изучения несимметричного прощелкивания арки, подверженной большим перемещениям и большим поворотам. Здесь, однако, эту проблему не рассматривали; нас интересовала способность построенного элемента TMS4n адекватно описывать большие перемещения и большие повороты арки без привлечения инкрементального подхода [15].

Результаты решения задачи получены для двух случаев опирания левого торца:

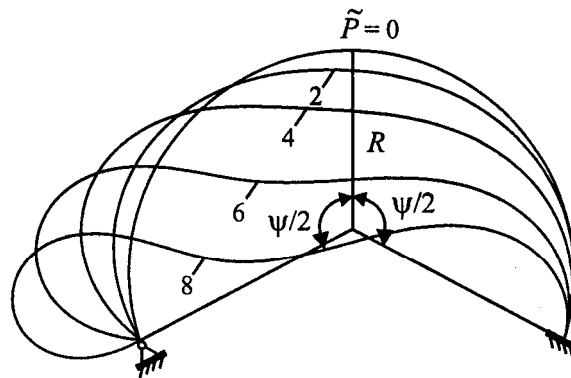


Рис. 1. Схема круговой арки.

Fig.1. Scheme of a circular arch.

$$v_1^- = v_3^- = 0, \tag{8}$$

$$v_1^+ = v_3^+ = 0, \tag{9}$$

и показаны в табл. 1. Для сравнения приведены результаты расчета [14] с использованием МКЭ в форме метода перемещений на основе геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко без учета поперечного обжатия, но с учетом поперечных нормальных напряжений. Как видим, представленные в табл. 1 данные хорошо согласуются. Отметим, что результаты настоящей работы получены без использования инкрементального подхода, а число итераций, необходимых для достижения заданной точности  $\epsilon = 10^{-6}$ , указано в табл. 1. Дополнительно на рис. 1 показаны четыре деформированные конфигурации арки до наступления прощелкивания, которое происходит при  $\tilde{P} = 9,14$  [14].

Рассмотрим геометрически нелинейную задачу локального нагружения легковой радиальной шины 175/70R13 (см. рис. 3 работы [1]). Сначала шина

Табл. 1

Перемещения  $\bar{v}_i = (v_i^- + v_i^+)/2$  круговой арки в точке приложения силы

Сила $\tilde{p}$	Работа [14]		TMS4n				Число итераций
			Уравнение (8)		Уравнение (9)		
	$-\bar{v}_1$	$-\bar{v}_3$	$-\bar{v}_1$	$-\bar{v}_3$	$-\bar{v}_1$	$-\bar{v}_3$	
2	6,75	8,61	6,84	8,64	6,59	8,44	10
4	21,53	25,70	21,73	25,82	21,17	25,24	16
6	43,11	58,21	43,35	58,60	42,86	57,74	25
8	56,01	93,63	56,40	94,76	55,96	93,74	40



Табл. 2

Прогиб шины в центре площадки нагружения

Нагружение	I	II	III	IV	[16]
$c$	0	$q_0/3$	$2q_0/3$	$q_0$	
$d$	$q_0$	$q_0/2$	0	$-q_0/2$	
$v_3^+(0,0)$ , мм	30,2	28,5	17,8	16,8	18,0

нагружается внутренним давлением  $p = 0,2$  МПа. Затем для предварительно напряженной резинкордной оболочки, подверженной действию в направлении, перпендикулярном оси вращения, консервативной нагрузки [1]

$$q_n^+ = -c - d \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2} - \frac{\varphi^2}{\Delta^2}} \quad \text{при} \quad \frac{t^2}{a^2} + \frac{\varphi^2}{\Delta^2} \leq 1, \quad (10)$$

решаем геометрически нелинейную задачу. Как и в [1], рассмотрено четыре вида локальных нагрузок, моделирующих контактное давление и распределенных внутри эллипса с полуосями  $a = 50$  мм и  $\Delta = \pi/10$  рад, где  $t$  и  $\varphi$  — меридиональная и окружная координаты шины. Значения коэффициентов  $c$  и  $d$  из (10) приведены в табл. 2 ( $q_0 = 0,333$  МПа). Результирующая сила обжатия для всех нагрузок одинакова и равна 3 кН. При расчетах предполагали, что торцы шины с координатами  $t = \pm 160$  мм жестко заделаны.

Деформированные профили внешнего контура шины при  $\varphi = 0$  для I и III случаев нагружения показаны на рис. 2. Дано также сравнение с результатами решения линейной задачи [1]. Дополнительно в табл. 2 представлены значения прогиба шины в центре площадки нагружения для всех четырех



Рис. 2. Деформированные профили шины 175/70R13, нагруженной внутренним давлением (—) и дополнительно локальной нагрузкой в линейной (—●—) и нелинейной (—▲—) постановках: а — нагружение I; б — нагружение III.

Fig. 2. Deformed profiles of a 175/70R13 tire subjected to internal pressure (—) and to an additional local load in the linear (—●—) and nonlinear (—▲—) statements: а — loading case I and б — loading case III.

нагрузок, а также данные эксперимента [16]. Как видно, результаты расчета деформированного профиля шины в геометрически нелинейной постановке для I и II случаев нагружения являются неприемлемыми в связи с сильно завышенными значениями прогиба. Причина в том, что нагрузки, моделирующие распределение контактного давления в этих случаях существенно отличаются от реального распределения. Решение же задачи в линейной постановке показывает, что деформированные профили шины практически не различаются для всех видов нагружения [1].

Для полноты картины обсудим влияние анизотропии на деформированное состояние шины в связи с использованием в ее брекере двух перекрестно армированных под углами  $\pm 70^\circ$  к меридиану металлокордных слоев [17]. На рис. 3 приведены зависимости перемещений внутренней поверхности шины от меридиональной координаты для III типа нагружения и некоторых значений окружной координаты  $\varphi = n\pi/20$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 7$ . Влияние анизотропии на распределение перемещений  $v_1^-$  и  $v_3^-$  мало заметно. Напротив, окружное перемещение  $v_2^-$ , которое по величине сравнимо с меридиональным перемещением  $v_1^-$ , распределено при  $\varphi = \pi/20$  и  $\varphi = \pi/10$  по достаточно сложному с заметным нарушением условий симметрии и антисимметрии закону.

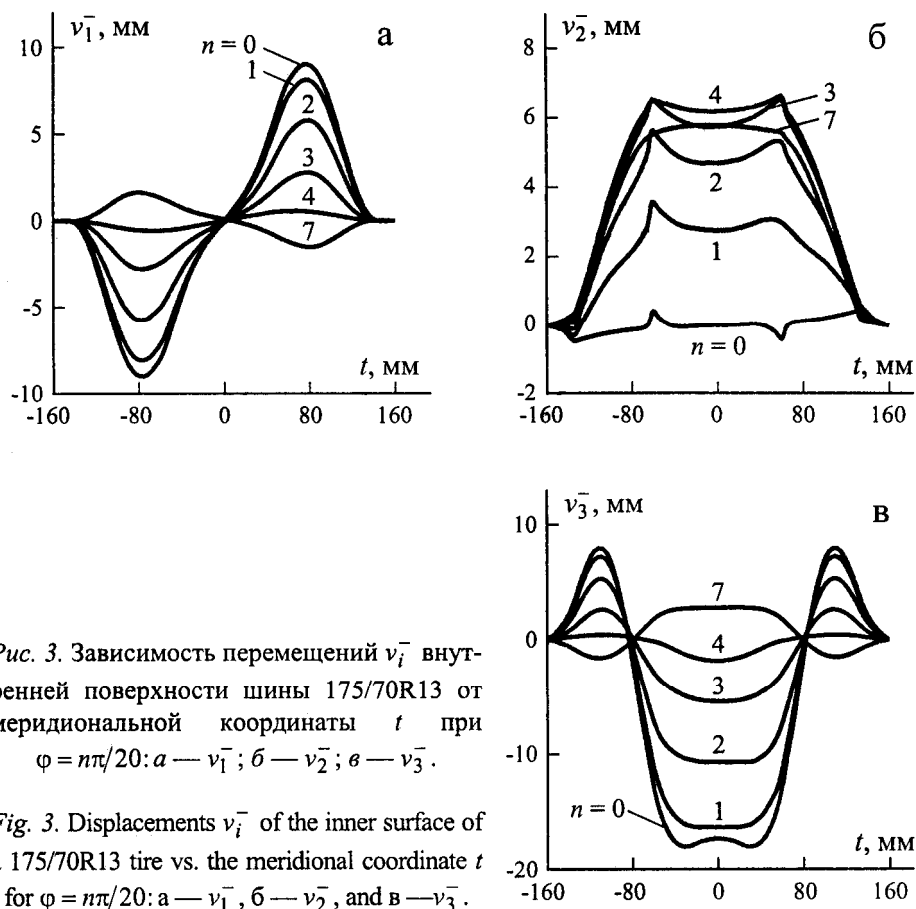


Рис. 3. Зависимость перемещений  $v_i^-$  внутренней поверхности шины 175/70R13 от меридиональной координаты  $t$  при  $\varphi = n\pi/20$ : а —  $v_1^-$ ; б —  $v_2^-$ ; в —  $v_3^-$ .

Fig. 3. Displacements  $v_i^-$  of the inner surface of a 175/70R13 tire vs. the meridional coordinate  $t$  for  $\varphi = n\pi/20$ : а —  $v_1^-$ , б —  $v_2^-$ , and в —  $v_3^-$ .

Авторы выражают признательность рецензенту за конструктивные замечания, способствовавшие существенному улучшению рукописи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка // Механика композит. материалов. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 607—620.
2. Голованов А. Н., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. — Казань: КФТИ АН СССР, 1989. — 269 с.
3. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. — Рига: Зинатне, 1988. — 284 с.
4. Betsch P., Gruttmann F., and Stein E. A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1996. — Vol. 130. — P. 57—79.
5. Basar Y., Itskov M., and Eckstein A. Composite laminates: nonlinear interlaminar stress analysis by multi-layer shell elements // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2000. — Vol. 185. — P. 367—397.
6. Bischoff M. and Ramm E. On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation // Int. J. Solids Struct. — 2000. — Vol. 37. — P. 6933—6960.
7. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
8. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия // Механика композит. материалов. — 1999. — Т. 35, № 4. — С. 435—446.
9. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Finite element formulation of straight composite beams undergoing finite rotations // Trans. Tambov State Technical University. — 2001. — Vol. 7. — P. 617—633.
10. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Simple and effective elements based upon Timoshenko — Mindlin shell theory // Computer Methods Appl. Mech. Eng. — 2002. — Vol. 191. — P. 1173—1187.
11. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. — Киев: Вища школа, 1982. — 480 с.
12. Hughes T. J. R. and Tezduyar T. E. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element // Trans. ASME J. Appl. Mech. — 1981. — Vol. 48. — P. 587—596.
13. Wempner G., Talaslidis D., and Hwang C. M. A simple and efficient approximation of shells via finite quadrilateral elements // Trans. ASME J. Appl. Mech. — 1982. — Vol. 49. — P. 115—120.
14. Li M. The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part I. The two-dimensional beam theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1997. — Vol. 146. — P. 53—63.
15. Bathe K. J. Finite Element Procedures. — New York: Prentice Hall, 1996. — 1037 p.

16. *Belkin A. E., Bukhin B. L., Mukhin O. N., and Narskaya N. L.* Some models and methods of pneumatic tire mechanics // *Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis* / Ed. by F. Böhm and H. P. Willumeit. — 1997. — P. 250—271.

17. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.

Поступила в редакцию 28.01.2002

Окончательный вариант поступил 22.04.2002

Received Jan. 28, 2002 (Apr. 22, 2002)

---