

Г. М. Куликов, С. В. Плотникова

Тамбовский государственный технический университет, Россия

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ
МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНАЯ ПОСТАНОВКА**

G. M. Kulikov and S. V. Plotnikova

**INVESTIGATION OF LOCALLY LOADED MULTILAYER SHELLS
BY A MIXED FINITE-ELEMENT METHOD.
1. GEOMETRICALLY LINEAR STATEMENT**

Keywords: multilayer shell, finite-element method, mixed model, rubber-cord composite

The Hu—Washizu functional is constructed for analyzing prestressed multilayer anisotropic Timoshenko-type shells. As unknown functions, six displacements and eleven strains of the faces of the shells are chosen. Based on mixed finite-element approximations, a numerical algorithm is developed for solving linear static problems of prestressed multilayer composite shells. The results of solving the well-known test problem on a cylindrical shell subjected to two opposite point forces and the problem on local loading of a toroidal multilayer rubber-cord shell are presented.

Ключевые слова: оболочка многослойная, метод конечных элементов, модель смешанная, композит резинокордный

Построен функционал Ху—Васидзу для предварительно напряженной многослойной анизотропной оболочки типа Тимошенко. В качестве искоемых функций выбраны шесть перемещений и 11 деформаций лицевых поверхностей оболочки. Разработан алгоритм численного решения задач статики предварительно напряженных многослойных композитных оболочек в линейной постановке на основе смешанных конечно-элементных аппроксимаций. Приведены результаты решения известной тестовой задачи об изгибе цилиндрической оболочки под действием двух противоположных сосредоточенных сил и задачи локального нагружения многослойной резинокордной торообразной оболочки.

Введение

Расчет локально нагруженных многослойных оболочек типа Тимошенко без учета поперечного обжатия представлен в работах [1—4]. История вопроса и методы решения обсуждаемых задач с приложением к резинордным оболочкам достаточно полно проанализированы в обзорах [5, 6]. Здесь на основе теории многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко с учетом поперечного обжатия [7] разработан алгоритм численного решения задачи локального нагружения многослойных оболочек с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций. Существенной особенностью подхода [7] является то, что в качестве искомых функций выбраны шесть перемещений лицевых поверхностей оболочки. Это позволяет упростить формулировку контактных задач механики тонкостенных конструкций [8] и разработать эффективные конечные элементы оболочки типа Тимошенко с точки зрения точного представления смещений элемента как жесткого целого [9, 10]. Данное свойство элемента оказывается весьма полезным при решении задач с высокой степенью локализации нагрузки [11, 12].

Постановка задачи

Рассмотрим предварительно напряженную тонкую оболочку толщиной h , составленную из N упругих анизотропных слоев постоянной толщины h_k . Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная отсчетной поверхности. В качестве отсчетной поверхности S примем внутреннюю поверхность какого-либо k -го слоя или поверхность контакта слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1, α_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату α_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S (рис. 1).

Пусть A_α — параметры Ламе; k_α — кривизны координатных линий; δ_k — расстояние от поверхности S до верхней граничной поверхности k -го слоя S_k ; u_i — перемещения точек оболочки; ϵ_{ij} — компоненты тензора деформаций; $\sigma_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений k -го слоя; $\tau_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора начальных напряжений k -го слоя; $b_{ijlm}^{(k)}$ — жесткости k -го слоя; p_i^- и p_i^+ — внешние поверхностные нагрузки, действующие на внутренней S^- и внешней S^+ лицевых поверхностях оболочки; $\mathbf{q}^{(k)} = q_v^{(k)} \mathbf{v} + q_t^{(k)} \mathbf{t} + q_3^{(k)} \mathbf{e}_3$ — вектор внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности k -го слоя Ω_k ; \mathbf{v} и \mathbf{t} — нормальный и тангенциальный единичные векторы к граничному контуру Γ . Здесь и далее $k = 1, \bar{N}$; $i, j, l, m = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$.

При построении теории многослойных анизотропных оболочек воспользуемся кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине оболочки [7, 13]

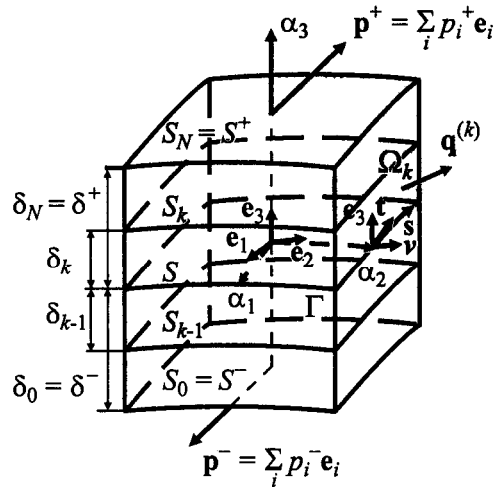


Рис. 1. Схема многослойной оболочки.

Fig. 1. Scheme of a multilayer shell.

$$u_i = N^-(\alpha_3)v_i^- + N^+(\alpha_3)v_i^+, \quad (1)$$

где $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ — перемещения лицевых поверхностей оболочки S^\pm ; $N^\pm(\alpha_3)$ — линейные функции формы оболочки:

$$N^-(\alpha_3) = \frac{\delta^+ - \alpha_3}{h}, \quad N^+(\alpha_3) = \frac{\alpha_3 - \delta^-}{h}.$$

Для деформаций примем независимую аппроксимацию:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = N^-(\alpha_3)E_{\alpha\alpha}^- + N^+(\alpha_3)E_{\alpha\alpha}^+, \quad \varepsilon_{33} = E_{33}, \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{ij} = N^-(\alpha_3)E_{ij}^- + N^+(\alpha_3)E_{ij}^+ \quad (i \neq j),$$

где $E_{\alpha\beta}^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ и $E_{\alpha 3}^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ — тангенциальные и поперечные касательные деформации лицевых поверхностей S^\pm ; $E_{33}(\alpha_1, \alpha_2)$ — поперечное обжатие оболочки.

Функционал Ху—Васидзу

Как известно, уравнения равновесия, деформационные соотношения, уравнения обобщенного закона Гука и граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях оболочки представляют собой уравнения Эйлера и ес-

тественные граничные условия некоторой вариационной задачи. В связи с этим введем в функционал Ху—Васидзу пространственной теории упругости [14] независимые аппроксимации перемещений (1) и деформаций (2) и, пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, приходим к формуле для вариации функционала Ху—Васидзу для предварительно напряженной многослойной анизотропной оболочки:

$$\begin{aligned} \delta J = & - \iint_S \left\{ \sum_{\alpha \leq i} \left[H_{\alpha i}^- - \sum_{\beta \leq j} (D_{\alpha i \beta j}^{00} E_{\beta j}^- + D_{\alpha i \beta j}^{01} E_{\beta j}^+) - \frac{D_{\alpha i 33}^-}{E_{33}} E_{33} \right] \delta E_{\alpha i}^- + \right. \\ & + \sum_{\alpha \leq i} \left[H_{\alpha i}^+ - \sum_{\beta \leq j} (D_{\alpha i \beta j}^{01} E_{\beta j}^- + D_{\alpha i \beta j}^{11} E_{\beta j}^+) - \frac{D_{\alpha i 33}^+}{E_{33}} E_{33} \right] \delta E_{\alpha i}^+ + \\ & + \left[H_{33} - \sum_{\beta \leq j} (D_{33 \beta j}^- E_{\beta j}^- + D_{33 \beta j}^+ E_{\beta j}^+) - D_{3333} E_{33} \right] \delta E_{33} + \\ & + \sum_{\alpha \leq i} [(E_{\alpha i}^- - e_{\alpha i}^-) \delta H_{\alpha i}^- + (E_{\alpha i}^+ - e_{\alpha i}^+) \delta H_{\alpha i}^+ - H_{\alpha i}^- \delta e_{\alpha i}^- - H_{\alpha i}^+ \delta e_{\alpha i}^+ - \\ & - L_{\alpha i}^- \delta \eta_{\alpha i}^- - L_{\alpha i}^+ \delta \eta_{\alpha i}^+] + (E_{33} - e_{33}) \delta H_{33} - H_{33} \delta e_{33} - L_{33} \delta \eta_{33} + \\ & \left. + \sum_i (p_i^+ \delta v_i^+ - p_i^- \delta v_i^-) \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - \oint_{\Gamma} (\hat{H}_{vv}^- \delta v_v^- + \hat{H}_{vv}^+ \delta v_v^+ + \hat{H}_{vi}^- \delta v_i^- + \hat{H}_{vi}^+ \delta v_i^+ + \hat{H}_{v3}^- \delta v_3^- + \hat{H}_{v3}^+ \delta v_3^+) ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} e_{\gamma\gamma}^{\pm} &= \frac{1}{\zeta_{\gamma}^{\pm}} \lambda_{\gamma}^{\pm}, \quad e_{12}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_1^{\pm}} \omega_1^{\pm} + \frac{1}{\zeta_2^{\pm}} \omega_2^{\pm}, \quad e_{\gamma 3}^{\pm} = \left(1 \pm \frac{k_{\gamma} h}{2\zeta_{\gamma}^{\pm}} \right) \beta_{\gamma} - \frac{1}{\zeta_{\gamma}^{\pm}} \theta_{\gamma}^{\pm}, \quad e_{33} = \beta_3, \\ \eta_{\gamma\gamma}^{\pm} &= \frac{1}{2(\zeta_{\gamma}^{\pm})^2} [(\lambda_{\gamma}^{\pm})^2 + (\omega_{\gamma}^{\pm})^2 + (\theta_{\gamma}^{\pm})^2], \quad \eta_{12}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_1^{\pm} \zeta_2^{\pm}} (\lambda_1^{\pm} \omega_2^{\pm} + \lambda_2^{\pm} \omega_1^{\pm} + \theta_1^{\pm} \theta_2^{\pm}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\eta_{\gamma 3}^{\pm} = \frac{1}{\zeta_{\gamma}^{\pm}} (\beta_{\gamma} \lambda_{\gamma}^{\pm} + \beta_8 \omega_{\gamma}^{\pm} - \beta_3 \theta_{\gamma}^{\pm}), \quad \eta_{33} = \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2),$$

$$\lambda_{\gamma}^{\pm} = \frac{1}{A_{\gamma}} \frac{\partial v_{\gamma}^{\pm}}{\partial \alpha_{\gamma}} + B_{\delta} v_{\delta}^{\pm} + k_{\gamma} v_3^{\pm}, \quad \omega_{\gamma}^{\pm} = \frac{1}{A_{\gamma}} \frac{\partial v_{\delta}^{\pm}}{\partial \alpha_{\gamma}} - B_{\delta} v_{\gamma}^{\pm}, \quad (4)$$

$$\theta_{\gamma}^{\pm} = -\frac{1}{A_{\gamma}} \frac{\partial v_3^{\pm}}{\partial \alpha_{\gamma}} + k_{\gamma} v_{\gamma}^{\pm}, \quad \beta_i = \frac{1}{h} (v_i^+ - v_i^-), \quad B_{\gamma} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_{\delta}}{\partial \alpha_{\gamma}} \quad (\delta \neq \gamma),$$

$$\zeta_{\gamma}^{\pm} = 1 + k_{\gamma} \delta^{\pm}, \quad \bar{\zeta}_{\gamma} = 1 + k_{\gamma} \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} = \frac{1}{2} (\delta^- + \delta^+).$$

Здесь $v_{\nu}^{\pm}, v_t^{\pm}, v_3^{\pm}$ — компоненты векторов перемещений лицевых поверхностей S^{\pm} в локальном базисе $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_3$ (см. рис. 1); $H_{\alpha i}^{\pm}, H_{33}$ — результирующие напряжений; $L_{\alpha i}^{\pm}, L_{33}$ — результирующие начальных напряжений; $\hat{H}_{\nu \nu}^{\pm}, \hat{H}_{vt}^{\pm}, \hat{H}_{v3}^{\pm}$ — результирующие внешних поверхностных нагрузок, определяемые по формулам

$$D_{ijlm}^{pq} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{ijlm}^{(k)} [N^-(\alpha_3)]^{2-p-q} [N^+(\alpha_3)]^{p+q} d\alpha_3 \quad (p, q = 0, 1), \quad (5)$$

$$D_{ij33}^- = D_{ij33}^{00} + D_{ij33}^{01}, \quad D_{ij33}^+ = D_{ij33}^{01} + D_{ij33}^{11}, \quad D_{3333} = D_{3333}^- + D_{3333}^+,$$

$$H_{\alpha i}^{\pm} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\alpha i}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad H_{33} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{33}^{(k)} d\alpha_3,$$

$$L_{\alpha i}^{\pm} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \tau_{\alpha i}^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad L_{33} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \tau_{33}^{(k)} d\alpha_3, \quad (6)$$

$$\hat{H}_{\nu s}^{\pm} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} q_s^{(k)} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3 \quad (s = \nu, t, 3).$$

В формулах (5) следует принять $b_{\alpha\beta\gamma 3}^{(k)} = b_{\alpha 333}^{(k)} = 0$.

Тензор напряжений можно вычислить по обобщенному закону Гука

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sum_{l,m} b_{ijlm}^{(k)} \varepsilon_{lm}. \quad (7)$$

Однако для расчета оболочек из несжимаемых или близких к ним по характеристикам материалов, в частности резинокордных, у которых коэффициенты Пуассона близки к 0,5, соотношения упругости (7) мало пригодны. Указанное противоречие можно преодолеть [7], если воспользоваться допущением о тонкостенности оболочки, приближенно полагая $b_{\alpha\beta 33}^{(k)} = 0$. Вместе с тем уравнение (7) для нормального напряжения $\sigma_{33}^{(k)}$ используется в измененном виде. Сказанное означает, что подчеркнутые члены в формуле (3) следует опустить. В результате приходим к несимметричной матрице жесткости оболочки [7], что, однако, не вносит существенных корректив в численную реализацию задачи на основе смешанной конечно-элементной модели.

Отметим также, что функционал Ху—Васидзу (3)—(6) обобщает соответствующий функционал для геометрически линейных многослойных оболочек [9] на случай учета предварительной напряженности.

Алгоритм численного решения линейных задач статики многослойных анизотропных оболочек

Рассмотрим задачу локального нагружения предварительно напряженной многослойной анизотропной оболочки в геометрически линейной постановке (более общая постановка обсуждается во втором сообщении). Можно доказать [9], что в этом случае деформационные соотношения (4), положенные в основу функционала Ху—Васидзу (3), точно представляют перемещения оболочки как жесткого целого. Это свойство деформационных соотношений (4) является принципиальным при расчете оболочек с высокой степенью локализации нагрузки, в том числе подверженных сосредоточенным воздействиям.

С учетом принятых допущений вариация функционала Ху—Васидзу (3) для элемента оболочки в его локальных координатах ξ_1, ξ_2 может быть представлена в матричной форме:

$$\delta J^{el} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{H} - \mathbf{DE})^T \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e})^T \delta \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \delta \mathbf{e} - \mathbf{L}^T \delta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{P}^T \delta \mathbf{v}] \Lambda d\xi_1 d\xi_2 - \oint_{\Gamma^{el}} \hat{\mathbf{H}}_{\Gamma}^T \delta \mathbf{v}_{\Gamma} ds, \quad (8)$$

$$\mathbf{v} = [v_1^- \ v_1^+ \ v_2^- \ v_2^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \quad \mathbf{v}_{\Gamma} = [v_v^- \ v_v^+ \ v_t^- \ v_t^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T,$$

$$\mathbf{P} = [-p_1^- \ p_1^+ \ -p_2^- \ p_2^+ \ -p_3^- \ p_3^+]^T,$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{\Gamma} = [\hat{H}_{vv}^- \ \hat{H}_{vv}^+ \ \hat{H}_{vt}^- \ \hat{H}_{vt}^+ \ \hat{H}_{v3}^- \ \hat{H}_{v3}^+]^T,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= [e_{11}^- e_{11}^+ e_{22}^- e_{22}^+ e_{12}^- e_{12}^+ e_{13}^- e_{13}^+ e_{23}^- e_{23}^+ e_{33}^- e_{33}^+]^T, \\
 \boldsymbol{\eta} &= [\eta_{11}^- \eta_{11}^+ \eta_{22}^- \eta_{22}^+ \eta_{12}^- \eta_{12}^+ \eta_{13}^- \eta_{13}^+ \eta_{23}^- \eta_{23}^+ \eta_{33}^- \eta_{33}^+]^T, \\
 \mathbf{E} &= [E_{11}^- E_{11}^+ E_{22}^- E_{22}^+ E_{12}^- E_{12}^+ E_{13}^- E_{13}^+ E_{23}^- E_{23}^+ E_{33}^- E_{33}^+]^T, \\
 \mathbf{H} &= [H_{11}^- H_{11}^+ H_{22}^- H_{22}^+ H_{12}^- H_{12}^+ H_{13}^- H_{13}^+ H_{23}^- H_{23}^+ H_{33}^- H_{33}^+]^T, \\
 \mathbf{L} &= [L_{11}^- L_{11}^+ L_{22}^- L_{22}^+ L_{12}^- L_{12}^+ L_{13}^- L_{13}^+ L_{23}^- L_{23}^+ L_{33}^- L_{33}^+]^T,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Lambda(\xi_1, \xi_2)$ — функция, характеризующая метрику элемента; \mathbf{v} — вектор перемещений; \mathbf{v}_Γ — вектор перемещений граничного контура элемента Γ^{el} ; \mathbf{E} , \mathbf{e} , $\boldsymbol{\eta}$ — векторы, характеризующие деформационные соотношения; \mathbf{H} — вектор результирующих напряжений; \mathbf{L} — вектор результирующих начальных напряжений; $\hat{\mathbf{H}}_\Gamma$ — вектор результирующих нагрузок, действующих на границе элемента Γ^{el} ; \mathbf{P} — вектор поверхностных нагрузок; \mathbf{D} — несимметричная матрица коэффициентов упругости размером 11×11 , элементы которой определяются на основе соотношений (5) и [7] для несжимаемых резиноподобных материалов.

В функционале (8) векторы \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{H} являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \tag{9}$$

где $N_r(\xi_1, \xi_2)$ — линейные функции формы; $\mathbf{v}_r = [v_{1r}^- v_{1r}^+ v_{2r}^- v_{2r}^+ v_{3r}^- v_{3r}^+]^T$ — векторы узловых перемещений ($r = \overline{1, 4}$).

Для деформаций согласно методу двойной аппроксимации [15, 16], обобщенному на случай учета поперечного обжатия, имеем еще более простые формулы

$$\mathbf{E} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2} \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2}, \tag{10}$$

$$\mathbf{E}^{00} = [E_{11}^{-00} E_{11}^{+00} E_{22}^{-00} E_{22}^{+00} E_{12}^{-00} E_{12}^{+00} E_{13}^{-00} E_{13}^{+00} E_{23}^{-00} E_{23}^{+00} E_{33}^{00}]^T, \tag{11}$$

$$\mathbf{E}^{01} = [E_{11}^{-01} E_{11}^{+01} E_{13}^{-01} E_{13}^{+01} E_{33}^{01}]^T, \quad \mathbf{E}^{10} = [E_{22}^{-10} E_{22}^{+10} E_{23}^{-10} E_{23}^{+10} E_{33}^{10}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{11}],$$

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где \mathbf{Q}^{00} — единичная матрица размером 11×11 ; \mathbf{E}^{00} — вектор, характеризующий однородные формы деформации; $\mathbf{E}^{01}, \mathbf{E}^{10}, \mathbf{E}^{11}$ — векторы, характеризующие высшие формы деформации. Здесь и далее $r_1, r_2 = 0, 1$.

Для результирующих напряжений согласно методу двойной аппроксимации [17] примем аналогичную аппроксимацию

$$\mathbf{H} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad \mathbf{L} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{L}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}. \quad (12)$$

При этом для векторов $\mathbf{H}^{r_1 r_2}$ и $\mathbf{L}^{r_1 r_2}$ используем формулы, аналогичные (11).

Введем перемещения (9), деформации (10) и результирующие напряжения (12) в формулу (8) и, пользуясь стандартной вариационной процедурой смешанной модели, запишем уравнения МКЭ:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{B}^{r_1 r_2} \mathbf{u}, \quad \mathbf{H}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (13)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [(\mathbf{B}^{r_1 r_2})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} + 2(\mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{u})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{L}^{r_1 r_2}] = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{u} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T$ — вектор узловых перемещений элемента; \mathbf{F} — вектор узловых нагрузок; $\mathbf{B}^{r_1 r_2}$ — деформационные матрицы размером 11×24 , отвечающие линейным составляющим тензора деформации; $\mathbf{R}^{r_1 r_2}$ — трехмерные деформационные массивы размером $11 \times 24 \times 24$, отвечающие нелинейным составляющим тензора деформации. При этом $\mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{u}$ — матрицы размером 11×24 , элементы которых вычисляются по формулам

$$(\mathbf{R}^{r_2} \mathbf{u})_{pq} = \sum_s R_{pqs}^{r_2} u_s \quad (p = \overline{1,11}; q, s = \overline{1,24}).$$

Исключив векторы \mathbf{E}^{r_2} и \mathbf{H}^{r_2} в формулах (13), получим разрешающее матричное уравнение

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\tau) \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

где \mathbf{K} — матрица жесткости элемента; \mathbf{K}_τ — матрица геометрической жесткости.

Важно отметить, что из уравнений (13) непосредственно вытекают соотношения [9]

$$hE_{33}^{10} = A_1 \bar{\xi}_1 (E_{13}^{+00} - E_{13}^{-00}), \quad hE_{33}^{01} = A_2 \bar{\xi}_2 (E_{23}^{+00} - E_{23}^{-00}), \quad (15)$$

$$hE_{33}^{11} = A_1 \bar{\xi}_1 (E_{13}^{+01} - E_{13}^{-01}), \quad hE_{33}^{11} = A_2 \bar{\xi}_2 (E_{23}^{+10} - E_{23}^{-10}),$$

которые означают, что только семь высших форм аппроксимации деформаций (например, $E_{11}^{-01}, E_{11}^{+01}, E_{22}^{-10}, E_{22}^{+10}, E_{13}^{-01}, E_{13}^{+01}, E_{23}^{-10}$) из 11, введенных в формулах (10), (11), являются независимыми. Соотношения (15) обеспечивают нужное число степеней свободы для элемента и, таким образом, матрица жесткости \mathbf{K} имеет ровно шесть нулевых собственных значений, что необходимо для точного представления малых перемещений элемента как жесткого целого [9].

Отметим также, что матрица жесткости элемента вычисляется на основе точного аналитического интегрирования. В результате удалось построить универсальный и весьма экономичный элемент, который не допускает ложных жестких смещений (механизмов) и не подвержен мембранному и сдвиговому заклиниваниям [11], а также пуассоновскому заклиниванию [18]. Разработанный элемент TMS4 и его нелинейный аналог (обсуждается во втором сообщении) положены в основу пакета программ TIRANA (Tire Analysis), предназначенного для использования в шинной промышленности.

Численные результаты и их обсуждение

Рассмотрим задачу об изгибе замкнутой круговой цилиндрической оболочки с жесткими диафрагмами на торцах под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (рис. 2). Механико-геометрические характеристики оболочки следующие [19]: $R = 300, L = 600, h = 3, E = 3 \cdot 10^6, \nu = 0,3, P = 1$. Особенностью задачи является то, что напряженное состояние близко чистому изгибу, что представляет определенные трудности при использовании МКЭ. Вследствие симметрии рассмотрен только один октант цилиндра. В табл. 1 представлены результаты расчета радиального переме-

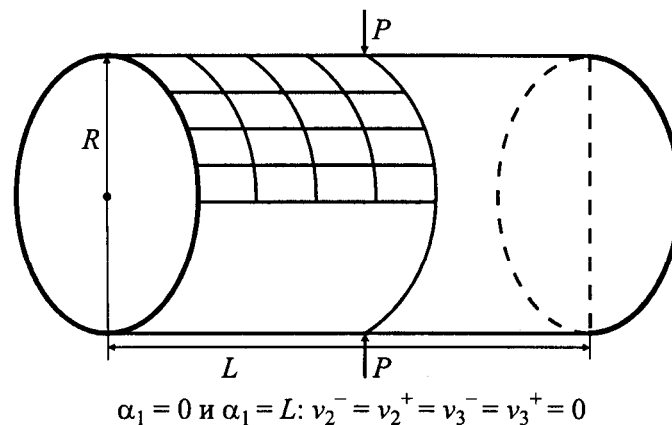


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка под действием двух радиальных сил.

Fig. 2. Cylindrical shell under the action of two radial forces.

щения в точке приложения силы. Перемещение нормализовано к вычислительно точному значению $-1,837 \cdot 10^{-5}$, которое было найдено путем использования достаточно мелких сеток. Дополнительно в табл. 1 показаны перемещения, полученные в работах [20—24] с помощью билинейных изопараметрических элементов и нормализованные в [25] к аналитическому решению на основе классической теории оболочек типа Тимошенко $-1,8245 \cdot 10^{-5}$. Как видим, на грубых сетках элемент TMS4 демонстрирует неплохую производительность, превосходя в этом тесте упомянутые выше изопараметрические элементы, что объясняется использованием деформационных соотношений, точно представляющих перемещения оболочки как жесткого целого.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о локальном нагружении резинокордной оболочки вращения — легковой радиальной шины 175/70R13 (рис. 3). Сначала шина нагружается внутренним давлением $p = 0,2$ МПа. Решение этой осесимметричной задачи получено на основе теории оболочек типа Тимошенко с учетом поперечного обжатия в геометрически нелинейной постановке с помощью численного алгоритма, разработанного в [7]. Затем для предварительно напряженной резинокордной оболочки, подверженной

Табл. 1

Нормализованное радиальное перемещение в точке приложения силы

Сетка	SRI [20]	RSDS [21]	MITC4 [22]	Mixed [23]	QPH [24]	TMS4
4 × 4	0,373	0,469	0,370	0,399	0,370	0,883
8 × 8	0,747	0,791	0,740	0,763	0,740	0,934
16 × 16	0,935	0,946	0,930	0,935	0,930	0,979

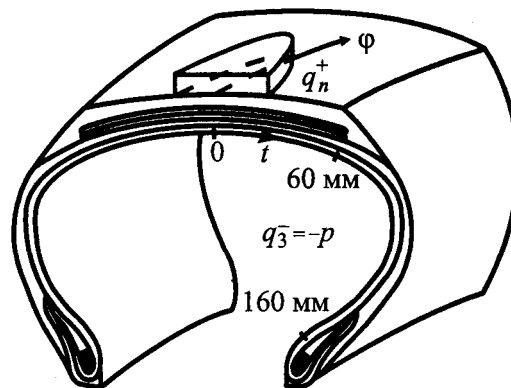


Рис. 3. К расчету легковой радиальной шины 175/70R13.

Fig. 3. Calculation of a radial car tire 175/70R13.

действию локально распределенной по внешней поверхности перпендикулярно оси вращения нагрузки

$$q_n^+ = -c - d \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2} - \frac{\varphi^2}{\Delta^2}} \quad \text{при} \quad \frac{t^2}{a^2} + \frac{\varphi^2}{\Delta^2} \leq 1, \quad (16)$$

где t и φ — дуговая и окружная координаты внутренней поверхности шины, решается линейная задача путем использования билинейного элемента TMS4 (геометрически нелинейная задача обсуждается во втором сообщении). Всего было рассмотрено четыре вида локальных нагрузок, распределенных внутри эллипса с полуосями $a = 50$ мм и $\Delta = \pi/10$ рад. В результате площадь области нагружения оказалась равной $\Omega = 13\,520$ мм², что соответствовало экспериментальным данным. Значения коэффициентов c и d из (16) в случае нагружения шины результирующей силой обжатия $P = 3$ кН приведены в табл. 2 и вычисляются согласно формуле $P = (c + 2d/3)\Omega$ ($q_0 = 0,333$ МПа). В ходе численных расчетов предполагали, что торцы шины при $t = \pm 160$ мм жестко заделаны. Данная ситуация в целом близка к действительности и обсуждается в [26].

Табл. 2

Прогиб шины в центре площадки нагружения

Нагружение	I	II	III	IV	[27]
c	0	$q_0/3$	$2q_0/3$	q_0	
d	q_0	$q_0/2$	0	$-q_0/2$	
$v_3^+(0, 0)$, мм	15,0	14,4	13,7	13,1	18,0

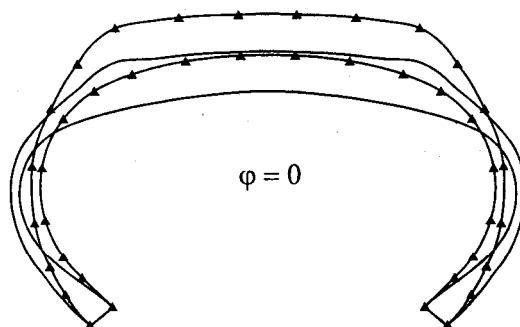


Рис. 4. Деформированные профили шины 175/70R13, нагруженной внутренним давлением (-▲-) и дополнительно локальной нагрузкой (—).

Fig. 4. Deformed profiles of a 175/70R13 tire subjected to internal pressure (-▲-) and an additional local load (—).

На рис. 4 показан деформированный профиль шины при $\varphi = 0$ для III типа нагружения. Для остальных случаев нагружения деформированные профили шины практически не различаются, поэтому они на рис. 4 не представлены. Для сравнения в табл. 2 приведено максимальное значение прогиба внешнего контура шины для всех рассмотренных нагрузок, а также данные эксперимента [27]. Как видим, результаты расчета, особенно для I типа нагружения, являются вполне удовлетворительными, если учесть, что решение задачи локального нагружения шины получено в линейной постановке. Что касается геометрически нелинейной задачи, то в этом случае деформированные профили шины для всех нагрузок, моделирующих контактное давление, различаются весьма значительно. При этом самое лучшее согласование расчетных и экспериментальных данных достигается, напротив, для III типа нагружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов Г. М. Неосесимметричное нагружение предварительно напряженной многослойной армированной оболочки // Механика композит. материалов. — 1990. — № 2. — С. 312—316.
2. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Локальное нагружение резинокордных оболочек вращения // Механика композит. материалов. — 1991. — № 4. — С. 670—676.
3. Kulikov G. M. Computational models for multilayered composite shells with application to tires // Tire Sci. Techn. — 1996. — Vol. 24. — P. 11—38.
4. Kulikov G. M., Böhm F., Duda A., Wille R. Zur inneren Mechanik des Radialreifens. Teil 1: Geschichtete Kompositschale mit globalem Verschiebungsansatz für das Gesamtlaminat // Technische Mechanik. — 2000. — Bd 20. — S. 1—12.
5. Noor A. K. and Tanner J. A. Advances and trends in the development of computational models for tires // Comput. Struct. — 1985. — Vol. 20. — P. 517—533.

6. Noor A. K. and Burton W. S. Assessment of computational models for multilayered composite shells // *Appl. Mech. Rev.* — 1990. — Vol. 43. — P. 67—97.
7. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия // *Механика композит. материалов.* — 1999. — Т. 35, № 4. — С. 435—446.
8. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Численное решение контактной задачи для многослойных композитных пластин // *Вест. ТамГТУ.* — 1998. — Т. 4. — С. 526—539.
9. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Simple and effective elements based upon Timoshenko—Mindlin shell theory // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2002. — Vol. 191. — P. 1173—1187.
10. Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. Finite element formulation of straight composite beams undergoing finite rotations // *Trans. Tambov State Technical University.* — 2001. — Vol. 7. — P. 617—633.
11. Голованов А. Н., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. — Казань: КФТИ АН СССР, 1989. — 269 с.
12. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. — Рига: Зинатне, 1988. — 284 с.
13. Kulikov G. M. Refined global approximation theory of multilayered plates and shells // *J. Eng. Mech.* — 2001. — Vol. 127. — P. 119—125.
14. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
15. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. — Киев: Вища школа, 1982. — 480 с.
16. Hughes T. J. R. and Tezduyar T. E. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* — 1981. — Vol. 48. — P. 587—596.
17. Wempner G., Talaslidis D., and Hwang C. M. A simple and efficient approximation of shells via finite quadrilateral elements // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* — 1982. — Vol. 49. — P. 115—120.
18. Bischoff M. and Ramm E. On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation // *Int. J. Solids Structures.* — 2000. — Vol. 37. — P. 6933—6960.
19. Heppner G. R. and Hansen J. S. A Mindlin element for thick and deep shells // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1986. — Vol. 54. — P. 21—47.
20. Hughes T. J. R. and Liu W. K. Nonlinear finite element analysis of shells. Part II. Two-dimensional shells // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1981. — Vol. 27. — P. 167—182.
21. Lam D., Liu W. K., Law E. S., and Belytschko T. Resultant-stress degenerated-shell element // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1986. — Vol. 55. — P. 259—300.
22. Bathe K. J. and Dvorkin E. N. A formulation of general shell elements — the use of mixed interpolation of tensorial components // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1986. — Vol. 22. — P. 697—722.
23. Simo J. C., Fox D. D., and Rifai M. S. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II. The linear theory; computational aspects // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1989. — Vol. 73. — P. 53—92.
24. Belytschko T. and Leviathan I. Physical stabilization of the 4-node shell element with one-point quadrature // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1994. — Vol. 113. — P. 321—350.

25. *Argyris J. H., Papadrakakis M., Apostolopoulou C., and Koutsourelakis S.* The TRIC shell element: theoretical and numerical investigation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2000. — Vol. 182. — P. 217—245.

26. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.

27. *Belkin A. E., Bukhin B. L., Mukhin O. N., and Narskaya N. L.* Some models and methods of pneumatic tire mechanics // *Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis* / Ed. by F. Böhm and H. P. Willumeit. — 1997. — P. 250—271.

Поступила в редакцию 28.01.2002

Окончательный вариант поступил 22.04.2002

Received Jan. 28, 2002 (Apr. 22, 2002)
