Доклады Академии наук СССР
1984. Том 275, № 5

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР Э.И. ГРИГОЛЮК, Г.М. КУЛИКОВ

К ТЕОРИИ УПРУГИХ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В [1, 2] предложена теория упругих слоистых оболочек, в которой принимается гипотеза о линейном распределении компонент вектора тангенциальных перемещений по толщине каждого слоя (гипотеза ломаной линии). При этом поперечные сдвиги и, как следствие, поперечные касательные напряжения распределены равномерно по толщине k-го слоя. Здесь на основе независимых кинематических [1] и статических гипотез построен непротиворечивый с точки зрения смешанного вариационного принципа нелинейный вариант теории слоистых анизотропных оболочек, в котором поперечные касательные напряжения, будучи непрерывными функциями поперечной координаты, на граничных поверхностях принимают заданные значения, а соотношения упругости для них выполняются интегрально.

1. Рассмотрим пологую оболочку, собранную из N анизотропных слоев. В качестве поверхности приведения Ω выберем внутреннюю граничную поверхность, которую отнесем к декартовым координатам x_1, x_2. Поперечную координату z отсчитываем в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности. Будем придерживаться обозначений работы [1]: h – полная толщина оболочки; h_k – толщина k-го слоя; δ_k – расстояние от поверхности приведения до верхней граничной поверхности k-го слоя; k_{ij} – кривизны и кручение координатных линий; u_i, w – тангенциальные и нормальное перемещения точек исходной поверхности; α_i^k – приращения тангенциальных перемещений в пределах k-го слоя; μ_i^0, μ_i^k – функции, характеризующие поперечные касательные напряжения k-го слоя. Частное дифференцирование по координате x_i обозначается нижним индексом i, следующим после запятой. Здесь и в дальнейшем $i, j = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots, N$.

Согласно [1] материал каждого слоя несжимаем в поперечном направлении и тангенциальные перемещения в пределах k-го слоя линейны относительно поперечной координаты:

$$u_i^k = u_i + \sum_{m=1}^{k-1} \alpha_i^m + h_k^{-1}(z - \delta_{k-1})\alpha_i^k, \qquad w_k = w. \tag{1}$$

Тангенциальные и поперечные сдвиговые деформации k-го слоя определяются формулами

$$\epsilon_{ij}^k = e_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1} \alpha_{ij}^m + h_k^{-1}(z - \delta_{k-1})\alpha_{ij}^k, \qquad \epsilon_{i3}^k = w_{,i} + h_k^{-1}\alpha_i^k,$$
$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i}w_{,j}) + k_{ij}w, \qquad \alpha_{ij}^k = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j}^k + \alpha_{j,i}^k). \tag{2}$$

Примем допущение о распределении поперечных касательных напряжений по толщине k-го слоя в виде (касательные нагрузки, действующие на граничных поверхностях оболочки, простоты ради опускаем)

$$\sigma_{i3}^k = f_0(z)\mu_i^0 + f_k(z)\mu_i^k. \tag{3}$$

Здесь $f_0(z)$, $f_k(z)$ – априори заданные функции, непрерывные и удовлетворяющие условиям

$$(4)\qquad f_0(\delta_0) = f_0(\delta_N) = 0, \qquad f_k(\delta_{k-1}) = f_k(\delta_k) = 0.$$

Как видно из соотношений (3), (4), поперечные касательные напряжения, будучи непрерывными функциями координаты z всюду в оболочке, в том числе и на поверхностях контакта смежных слоев $z=\delta_k$, обращаются в нуль на граничных поверхностях $z=\delta_0$, $z=\delta_N$.

Вопрос о рациональном выборе функций $f_0(z)$, $f_k(z)$ является важным: от этого во многом зависит эффективность предлагаемого варианта теории слоистых оболочек. Известно, что поперечные касательные напряжения распределены по толщине оболочки практически по закону квадратной параболы. Принимая во внимание сказанное, при расчетах будем полагать

$$f_0(z) = 6z(h-z)/h^3, \qquad z \in [0, h],$$

$$f_k(z) = 6(z-\delta_{k-1})(\delta_k - z)/h_k^3, \qquad z \in [\delta_{k-1}, \delta_k];$$

при этом справедливы следующие равенства:

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(z)dz = 1, \qquad \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z)dz = 1.$$

2. Построение математически обоснованной теории слоистых анизотропных оболочек в рамках принятой системы независимых кинематических и статических гипотез (1), (3) требует применения смешанного вариационного принципа, который открывает естественный путь сведения трехмерной задачи теории упругости к двухмерной задаче и позволяет связать прогиб w, приращения тангенциальных перемещений α_i^k с "лишними" функциями μ_i^0, μ_i^k, характеризующими поперечные касательные напряжения. Рассмотрим вариационное уравнение [3]

$$(6)\qquad \delta U = \delta A,$$

где A – работа внешних нагрузок, а вариацию функционала U с учетом соотношений (2) запишем так:

$$(7)\qquad \delta U = \iint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \left\{ N_{ij}\delta e_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \left[h_k^{-1} H_{ij}^k \delta\alpha_{ij}^k + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left(\epsilon_{ij}^k - \sum_{l,n=1}^{2} a_{ijln}^k \sigma_{ln}^k \right) \delta\sigma_{ij}^k \, dz \right] \right\} +$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{N} \left[Q_i^k \delta\epsilon_{i3}^k + \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left(\epsilon_{i3}^k - \sum_{j=1}^{2} c_{ij}^k \sigma_{j3}^k \right) \delta\sigma_{i3}^k \; dz \right] \right\} dx_1\, dx_2.$$

Здесь a_{ijln}^k, c_{ij}^k – тангенциальные и поперечные сдвиговые податливости k-го слоя; N_{ij} – тангенциальные удельные усилия; N_{ij}^k, Q_{ij}^k – тангенциальные и поперечные удельные усилия k-го слоя; H_{ij}^k – обобщенные удельные моменты k-го слоя, определяемые формулами

$$(8)\qquad \begin{aligned} &N_{ij} = \sum_{k=1}^{N} N_{ij}^k, \quad N_{ij}^k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^k dz, \quad Q_i^k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{i3}^k dz, \\ &H_{ij}^k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^k (z-\delta_{k-1})dz + h_k \sum_{m=k+1}^{N} N_{ij}^m . \end{aligned}$$

Согласно обобщенному закону Гука $\epsilon_{ij}^k = \sum_{l,n=1}^{2} a_{ijln}^k \sigma_{ln}^k$, тем самым выражение для δU несколько упрощается. Применяя к (7) стандартную вариационную процедуру и вычисляя δA, из смешанного вариационного принципа (6) получим $2N+3$ уравнений равновесия [1], соответствующие им граничные условия и дополнительные соотношения

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left(\epsilon_{i3}^k - \sum_{j=1}^{2} c_{ij}^k \sigma_{j3}^k \right) f_0(z)\,dz = 0,$$
$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left(\epsilon_{i3}^k - \sum_{j=1}^{2} c_{ij}^k \sigma_{j3}^k \right) f_k(z)\,dz = 0, \tag{9}$$

имеющие простой механический смысл: соотношения упругости для поперечных касательных напряжений выполняются интегрально по толщине k-го слоя с весовой функцией $f_k(z)$ и, дополнительно, по толщине пакета с весовой функцией $f_0(z)$.

Внесем σ_{i3}^k из (3) в формулы (9) и, учитывая (5), придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно функций μ_i^0, μ_i^k:

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{N} c_{ij}^k (\lambda_k \mu_j^0 + \lambda_{k0} \mu_j^k) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \epsilon_{i3}^k,$$
$$\sum_{j=1}^{2} c_{ij}^k (\lambda_{k0} \mu_j^0 + \lambda_{kk} \mu_j^k) = \epsilon_{i3}^k, \tag{10}$$

где использованы обозначения

$$\xi_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(z)\,dz, \quad \lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z)\,dz,$$

$$\lambda_{km} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_m(z)\,dz, \quad m = 0, k.$$

Решение системы (10) представим в форме

$$\mu_1^0 = \frac{\tau_{22}\psi_1 - \tau_{12}\psi_2}{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}, \quad \mu_1^k = \frac{1}{\lambda_{kk}} \frac{c_{22}^k \epsilon_{13}^k - c_{12}^k \epsilon_{23}^k}{c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2} - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}} \mu_1^0 \quad (1 \rightleftarrows 2),$$

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{N} \left(\xi_k - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}} \right) \epsilon_{i3}^k, \quad \tau_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) c_{ij}^k.$$

Полученные формулы в основном решают поставленную задачу, поскольку все величины и, в частности, поперечные удельные усилия из (8) могут быть выражены через компоненты вектора обобщенных перемещений u_i, w, α_i^k.

В заключение заметим, что предложенный подход можно распространить и на непологие оболочки.

Московский автомеханический институт
Тамбовский институт химического машиностроения

Поступило
1 X 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* – Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5, с. 68–80. 2. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* – Инж. журн. МТТ, 1967, № 1, с. 163–169. 3. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* – Механика композ. матер., 1981, № 3, с. 443–452.