

УДК 539.3

© 2003 г. Г. М. Куликов, С. В. Плотникова

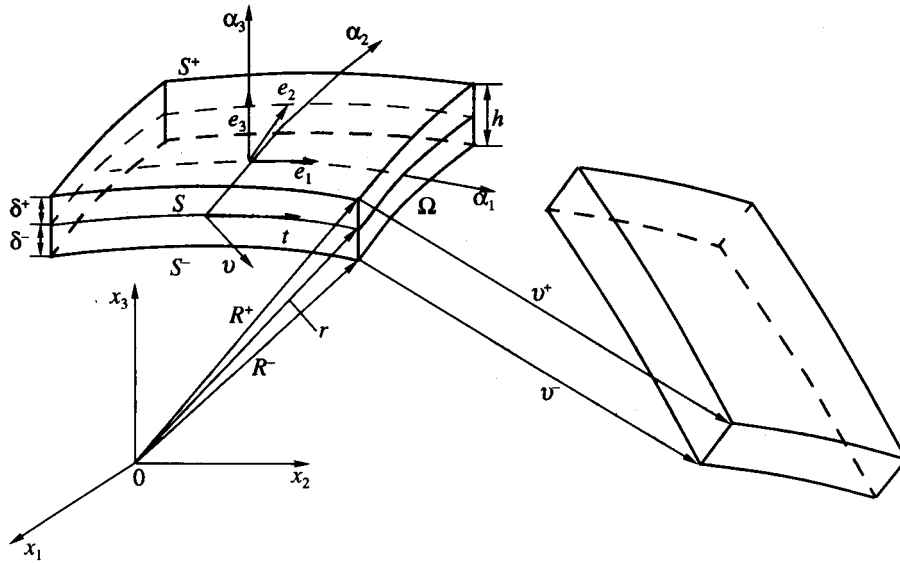
**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ
ОБОЛОЧКИ ТИПА ТИМОШЕНКО**

Разработан алгоритм численного решения контактной задачи для упругой оболочки типа Тимошенко, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций. Существенно, что в качестве искомым функций выбираются 6 перемещений лицевых поверхностей оболочки. Это позволяет, во-первых, упростить формулировку контактных задач механики тонкостенных конструкций, поскольку в качестве искомым функций выбираются функции, с помощью которых формулируются условия непроникания контактирующих тел, и во-вторых, получить соотношения для компонент тензора деформаций Грина–Лагранжа в криволинейных ортогональных координатах, точно представляющие произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела.

Метод конечных элементов – наиболее мощный численный метод решения контактных задач механики оболочек. Вместе с тем проблема построения искривленных конечных элементов тонких оболочек, подверженных произвольно большим поворотам и взаимодействующих с жесткими телами, еще далека от решения [1, 2]. Причина кроется в неадекватном представлении деформационными соотношениями больших перемещений элемента оболочки как жесткого целого. Поэтому неудивительно, что в связи с отсутствием в литературе деформационных соотношений, способных в локальных криволинейных координатах точно представлять произвольное деформированное состояние оболочки, в основном разрабатывалась концепция “вырожденного” (изопараметрического) элемента [3], которая позволяла за счет существенного увеличения времени расчета представлять произвольно большие смещения элемента оболочки как жесткого целого в глобальной декартовой системе координат [2, 4].

Ниже на основе теории упругих оболочек типа Тимошенко с учетом поперечного обжатия [5, 6] разработан алгоритм численного решения контактной задачи для оболочки, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций [7, 8]. Поскольку в качестве искомым функций выбраны перемещения лицевых поверхностей оболочки [9, 10], это упрощает формулировку контактных задач механики тонкостенных конструкций [11].

1. Деформационные соотношения геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h . В качестве отсчетной поверхности S примем внутреннюю поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату α_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S (фиг. 1). Пусть \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 – единичные векторы касательных к координатным линиям α_1 и α_2 , \mathbf{e}_3 – единичный вектор нормали, A_α и k_α – параметры Ламе и кривизны координатных линий поверхности S , δ^- и δ^+ – расстояния от поверхности S до нижней S^- и верхней S^+ поверхностей оболочки, u_i – компоненты вектора перемещений, ϵ_{ij} – компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа, p_i^\pm – внешние



Фиг. 1

поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях S^\pm , $\mathbf{q} = q_v \mathbf{v} + q_t \mathbf{t} + q_3 \mathbf{e}_3$ – вектор внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности Ω , \mathbf{v} и \mathbf{t} – нормальный и тангенциальный единичные векторы к граничному контуру Γ (фиг. 1). Здесь и далее латинские индексы $i, j, l, m = 1, 2, 3$, а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$.

Воспользуемся кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине оболочки [5, 6]

$$\mathbf{u} = \sum_{\pm} N^\pm(\alpha_3) \mathbf{v}^\pm, \quad \mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}^\pm = \sum_i v_i^\pm \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

где \mathbf{v}^\pm – векторы перемещений точек лицевых поверхностей S^\pm , $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ – компоненты этих векторов, $N^\pm(\alpha_3)$ – линейные функции формы оболочки

$$N^-(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\delta^+ - \alpha_3), \quad N^+(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\alpha_3 - \delta^-) \quad (1.2)$$

Введем перемещения (1.1) в деформационные соотношения пространственной теории упругости [12] и, полагая, что тангенциальные компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа изменяются по толщине оболочки согласно линейному закону, приходим к деформационным соотношениям геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко средней толщины [13]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{\pm} N^\pm(\alpha_3) \left(\frac{1}{H_\alpha^\pm} \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \cdot \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta^\pm} \mathbf{v}_{,\beta}^\pm \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha^\pm H_\beta^\pm} \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^\pm \right)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha} \cdot (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}) \frac{1}{H_\alpha} \varepsilon_{33,\alpha}, \quad \varepsilon_{33} = \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \right) \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{h}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-), \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+)$$

где $H_\alpha^\pm = A_\alpha(1 + k_\alpha \delta^\pm)$ – параметры Ламе лицевых поверхностей S^\pm , $\bar{H}_\alpha = A_\alpha(1 + k_\alpha \bar{\delta})$ – параметры Ламе срединной поверхности \bar{S} , $\bar{\delta} = (\delta^- + \delta^+)/2$ – расстояние от отсчетной

поверхности до срединной поверхности, $\bar{\mathbf{v}}$ – вектор перемещения точки срединной поверхности оболочки, нижний индекс β , следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координате α_β .

Деформационные соотношения (1.3) весьма привлекательны с точки зрения их использования в методе конечных элементов, поскольку они *точно* представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела.

Действительно, перемещения лицевых поверхностей оболочки как жесткого целого [14] можно представить в виде

$$\mathbf{v}^{\pm R} = \Delta + \Phi \mathbf{R}^\pm - \mathbf{R}^\pm \quad (1.4)$$

где $\mathbf{R}^\pm = \mathbf{r} + \delta^\pm \mathbf{e}_3$ – радиус-векторы точек лицевых поверхностей, \mathbf{r} – радиус-вектор точки отсчетной поверхности, Δ – вектор поступательного перемещения оболочки, Φ – ортогональная матрица, характеризующая вращение оболочки как жесткого целого вокруг точки O (фиг. 1). Для производных векторов жестких смещений (1.4) имеет место формула

$$\frac{1}{H_\alpha^\pm} \mathbf{v}_{,\alpha}^{\pm R} = \Phi \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha \quad (1.5)$$

Вводя далее выражения (1.4), (1.5) в деформационные соотношения (1.3) и учитывая свойство ортогонального преобразования сохранять скалярное произведение векторов, получим

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta}^R &= (\Phi \mathbf{e}_\alpha) \cdot (\Phi \mathbf{e}_\beta) - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0, \quad 2\varepsilon_{33}^R = (\Phi \mathbf{e}_3) \cdot (\Phi \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \\ 2\varepsilon_{\alpha 3}^R &= \frac{1 + k_\alpha \alpha_3}{1 + k_\alpha \delta} [(\Phi \mathbf{e}_\alpha) \cdot (\Phi \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3] = 0 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В целях использования деформационных соотношений (1.3) в алгоритме численного решения контактных задач представим их в скалярной форме

$$\varepsilon_{\alpha i} = \sum_{\pm} N^\pm(\alpha_3)(e_{\alpha i}^\pm + \eta_{\alpha i}^\pm), \quad \varepsilon_{33} = e_{33} + \eta_{33} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}^\pm &= \frac{1}{\zeta_\alpha^\pm} \lambda_\alpha^\pm, \quad 2e_{12}^\pm = \frac{1}{\zeta_1^\pm} \omega_1^\pm + \frac{1}{\zeta_2^\pm} \omega_2^\pm \\ 2e_{\alpha 3}^\pm &= \left(1 \pm \frac{k_\alpha h}{2\zeta_\alpha}\right) \beta_\alpha - \frac{1}{\zeta_\alpha} \theta_\alpha^\pm, \quad e_{33} = \beta_3 \\ \eta_{\alpha\alpha}^\pm &= \frac{1}{2(\zeta_\alpha^\pm)^2} [(\lambda_\alpha^\pm)^2 + (\omega_\alpha^\pm)^2 + (\theta_\alpha^\pm)^2], \quad \eta_{12}^\pm = \frac{1}{2\zeta_1^\pm \zeta_2^\pm} (\lambda_1^\pm \omega_2^\pm + \lambda_2^\pm \omega_1^\pm + \theta_1^\pm \theta_2^\pm) \\ \eta_{\alpha 3}^\pm &= \frac{1}{2\zeta_\alpha} (\beta_\alpha \lambda_\alpha^\pm + \beta_\gamma \omega_\alpha^\pm - \beta_3 \theta_\alpha^\pm), \quad \eta_{33} = \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \\ \lambda_\alpha^\pm &= \frac{1}{A_\alpha} v_{\alpha,\alpha}^\pm + B_\gamma v_\gamma^\pm + k_\alpha v_3^\pm, \quad \omega_\alpha^\pm = \frac{1}{A_\alpha} v_{\gamma,\alpha}^\pm - B_\gamma v_\alpha^\pm \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\theta_{\alpha}^{\pm} = -\frac{1}{A_{\alpha}} v_{3,\alpha}^{\pm} + k_{\alpha} v_{\alpha}^{\pm}, \quad \beta_i = \frac{1}{h} (v_i^+ - v_i^-)$$

$$\zeta_{\alpha}^{\pm} = 1 + k_{\alpha} \delta^{\pm}, \quad \bar{\zeta}_{\alpha} = 1 + k_{\alpha} \bar{\delta}, \quad B_{\alpha} = \frac{1}{A_1 A_2} A_{\gamma, \alpha} \quad (\gamma \neq \alpha)$$

2. Функционал Ху–Васидзу для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко. Как известно, уравнения равновесия, деформационные соотношения, уравнения обобщенного закона Гука и граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях оболочки представляют собой уравнения Эйлера и естественные граничные условия некоторой вариационной задачи. В связи с этим введем в функционал Ху–Васидзу пространственной теории упругости [15] аппроксимации перемещений (1.1) и независимо введенных деформаций

$$\epsilon_{\alpha i} = \sum_{\pm} N^{\pm}(\alpha_3) E_{\alpha i}^{\pm}, \quad \epsilon_{33} = E_{33} \tag{2.1}$$

где $E_{\alpha\beta}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$, $E_{\alpha 3}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$, – тангенциальные и поперечные касательные деформации лицевых поверхностей оболочки, $E_{33}(\alpha_1, \alpha_2)$ – поперечное обжатие оболочки. В результате, учитывая соотношения (1.6), (1.7), приходим к следующей формуле для функционала Ху–Васидзу:

$$J_{HW} = \iint_S \left\{ \Pi - \sum_{\pm} \left[\sum_{i+j < 6} T_{ij}^{\pm} (E_{ij}^{\pm} - e_{ij}^{\pm} - \eta_{ij}^{\pm}) + \sum_i (\pm p_i^{\pm}) v_i^{\pm} \right] - T_{33} (E_{33} - e_{33} - \eta_{33}) \right\} \times \\ \times A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \oint_{\Gamma} \sum_{\pm} (\hat{T}_{vv}^{\pm} v_v^{\pm} + \hat{T}_{vt}^{\pm} v_t^{\pm} + \hat{T}_{v3}^{\pm} v_3^{\pm}) (1 + k_N \bar{\delta}) ds \tag{2.2}$$

Здесь v_v^{\pm} , v_t^{\pm} , v_3^{\pm} – компоненты векторов перемещений лицевых поверхностей S^{\pm} в локальном базисе \mathbf{v} , \mathbf{t} , \mathbf{e}_3 (фиг. 1), k_N – нормальная кривизна кривой Γ , $\Pi(E_{\alpha i}^{\pm}, E_{33})$ – упругий потенциал оболочки, $T_{\alpha i}^{\pm}$, T_{33} – результирующие напряжений, \hat{T}_{vv}^{\pm} , \hat{T}_{vt}^{\pm} , \hat{T}_{v3}^{\pm} – результирующие внешних поверхностных нагрузок, определяемые по формулам

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l,m} [D_{ijlm}^{0-} E_{ij}^- E_{lm}^- + D_{ijlm}^{1-} E_{ij}^- E_{lm}^+ + D_{ijlm}^{0+} E_{ij}^+ E_{lm}^- + D_{ijlm}^{1+} E_{ij}^+ E_{lm}^+] \tag{2.3}$$

$$D_{ijlm}^{n\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} b_{ijlm} N^{\pm}(\alpha_3) [N^-(\alpha_3)]^{1-n} [N^+(\alpha_3)]^n d\alpha_3, \quad n = 0, 1 \\ T_{\alpha i}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} S_{\alpha i} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad T_{33} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} S_{33} d\alpha_3, \quad \hat{T}_{\nu\kappa}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} q_{\kappa} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad \kappa = v, t, 3 \tag{2.4}$$

где S_{ij} – компоненты симметричного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, b_{ijlm} – жесткостные характеристики материала. Отметим, что в формулах (2.3) принято $E_{33}^- = E_{33}^+ = E_{33}$ и $b_{\alpha\beta\gamma 3} = b_{\alpha 333} = 0$.

Учитывая, что перемещения, деформации и результирующие напряжений являются независимыми функциональными переменными, вариацию функционала Ху–Васидзу представим в форме

$$\begin{aligned}
 \delta J_{HW} = & - \iint_S \left[\sum_{\pm} \left(\sum_{i+j < 6} \left\{ T_{ij}^{\pm} - \sum_{l+m < 6} (D_{ijlm}^{0+} E_{lm}^{-} + D_{ijlm}^{1+} E_{lm}^{+}) - \underline{D_{ij33}^{+} E_{33}} \right\} \delta E_{ij}^{\pm} + \right. \right. \\
 & + (E_{ij}^{\pm} - e_{ij}^{\pm} - \eta_{ij}^{\pm}) \delta T_{ij}^{\pm} - T_{ij}^{\pm} (\delta e_{ij}^{\pm} + \delta \eta_{ij}^{\pm}) \left. \right\} + \sum_i (\pm p_i^{\pm}) \delta v_i^{\pm} \left. \right) + \\
 & + \left[T_{33} - \sum_{l+m < 6} (D_{33lm}^{-} E_{lm}^{-} + D_{33lm}^{+} E_{lm}^{+}) - D_{3333} E_{33} \right] \delta E_{33} + \\
 & + (E_{33} - e_{33} - \eta_{33}) \delta T_{33} - T_{33} (\delta e_{33} + \delta \eta_{33}) \left. \right] A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
 & - \oint_{\Gamma^{\pm}} (\hat{T}_{vv}^{\pm} \delta v_v^{\pm} + \hat{T}_{vi}^{\pm} \delta v_i^{\pm} + \hat{T}_{v3}^{\pm} \delta v_3^{\pm}) (1 + k_N \bar{\delta}) ds \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

где

$$D_{ij33}^{-} = D_{ij33}^{0-} + D_{ij33}^{1-}, \quad D_{ij33}^{+} = D_{ij33}^{0+} + D_{ij33}^{1+}, \quad D_{3333} = D_{3333}^{-} + D_{3333}^{+}$$

При вычислении компонент симметричного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа могут быть использованы полные соотношения обобщенного закона Гука

$$S_{ij} = \sum_{l,m} b_{ijlm} \varepsilon_{lm} \quad (2.6)$$

Однако при расчете оболочек из несжимаемых или близких к ним по характеристикам материалов, у которых коэффициенты Пуассона близки к 1/2 [5, 10], а также с целью преодоления так называемого пуассоновского заклинивания [8, 16] будем приближенно полагать в соотношениях (2.6) $b_{\alpha\beta 33} = 0$. Вместе с тем уравнение для поперечного нормального напряжения используется в неизменном виде, т.е. $b_{33\alpha\beta} \neq 0$. Сказанное означает, что подчеркнутый член в формуле (2.5) следует опустить. В результате приходим к несимметричной матрице жесткости [13], что, однако, не внесит существенных корректив в численную реализацию контактной задачи на основе смешанной конечноэлементной модели.

3. Модифицированный функционал Ху–Васидзу для решения задачи контакта оболочки типа Тимошенко с жестким штампом. Предположим для определенности, что контакт оболочки с абсолютно жестким плоским штампом осуществляется по части внешней поверхности оболочки S_c^+ , причем трение в области контакта отсутствует. Условия непроникания контактирующих тел и неположительности контактного давления q_c^+ запишем в виде

$$g^+ - \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad q_c^+ \leq 0 \quad (3.1)$$

где $g^+(\alpha_1, \alpha_2)$ – начальный зазор, т.е. кратчайшее расстояние от некоторой точки оболочки $M^+(\alpha_1, \alpha_2)$, принадлежащей поверхности предполагаемого контакта S_c^+ , до штампа, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к плоскости штампа.

Неравенства (3.1) необходимо дополнить условием того, что контактное давление определяется в точках, которые вступают в контакт с жестким штампом, т.е. должно выполняться равенство

$$q_c^+(g^+ - \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}) = 0 \tag{3.2}$$

Для решения задачи контактного взаимодействия оболочки с жестким штампом рассмотрим модифицированный функционал Ху–Васидзу, дополнив функционал (2.2) слагаемым, отвечающим за выполнение условий контакта (3.1), (3.2), и еще одним слагаемым [1], связанным с регуляризацией задачи

$$J = J_{HW} + \int \int_{S_c^+} \left[\lambda (g^+ - \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2\epsilon} \lambda^2 \right] dS \tag{3.3}$$

где λ – множитель Лагранжа (контактное давление), ϵ – регуляризационный параметр. Отметим, что наличие регуляризационного члена в функционале (3.3) подразумевает замену абсолютно жесткого штампа совокупностью непрерывно распределенных пружин с жесткостью ϵ . Предельный случай $\epsilon \rightarrow \infty$ соответствует классическому методу множителей Лагранжа.

В дальнейшем потребуются формула для вариации модифицированного функционала Ху–Васидзу. Учитывая выражение (2.5), ее можно представить в виде

$$\delta J = \delta J_{HW} + \int \int_{S_c^+} \left[(g^+ - \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\epsilon} \lambda) \delta \lambda - \lambda \mathbf{n} \delta \mathbf{v}^+ \right] dS \tag{3.4}$$

4. Алгоритм численного решения контактной задачи смешанным методом конечных элементов. Вариация модифицированного функционала Ху–Васидзу (3.4) для элемента оболочки в его безразмерных криволинейных координатах ξ_1, ξ_2 может быть записана в матричной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta J^{el} = & - \int \int_{-1-1}^{11} \left[(\mathbf{T} - \mathbf{DE})^T \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e} - \boldsymbol{\eta})^T \delta \mathbf{T} - \mathbf{T}^T (\delta \mathbf{e} + \delta \boldsymbol{\eta}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{P} + \lambda \mathbf{m})^T \delta \mathbf{v} - \left(g^+ - \mathbf{m}^T \mathbf{v} - \frac{1}{\epsilon} \lambda \right) d\lambda \right] \mu^{el} d\xi_1 d\xi_2 - \oint_{\Gamma^{el}} \hat{\mathbf{T}} \delta \mathbf{v}_\Gamma (1 + k_N \bar{\delta}) ds \\ \mathbf{v}^T = & [v_1^- v_1^+ v_2^- v_2^+ v_3^- v_3^+], \quad \mathbf{v}_\Gamma^T = [v_v^- v_v^+ v_i^- v_i^+ v_3^- v_3^+] \\ \mathbf{E}^T = & [E_{11}^- E_{11}^+ E_{22}^- E_{22}^+ E_{12}^- E_{12}^+ E_{13}^- E_{13}^+ E_{23}^- E_{23}^+ E_{33}^- E_{33}^+] \\ \mathbf{e}^T = & [e_{11}^- e_{11}^+ e_{22}^- e_{22}^+ e_{12}^- e_{12}^+ e_{13}^- e_{13}^+ e_{23}^- e_{23}^+ e_{33}^- e_{33}^+] \\ \boldsymbol{\eta}^T = & [\eta_{11}^- \eta_{11}^+ \eta_{22}^- \eta_{22}^+ \eta_{12}^- \eta_{12}^+ \eta_{13}^- \eta_{13}^+ \eta_{23}^- \eta_{23}^+ \eta_{33}^- \eta_{33}^+] \\ \hat{\mathbf{T}}^T = & [T_{11}^- T_{11}^+ T_{22}^- T_{22}^+ T_{12}^- T_{12}^+ T_{13}^- T_{13}^+ T_{23}^- T_{23}^+ T_{33}^- T_{33}^+] \\ \mathbf{T}^T = & [\hat{T}_{vv}^- \hat{T}_{vv}^+ \hat{T}_{vi}^- \hat{T}_{vi}^+ \hat{T}_{v3}^- \hat{T}_{v3}^+], \quad \mathbf{P}^T = [-p_1^- p_1^+ - p_2^- p_2^+ - p_3^- p_3^+] \\ \mathbf{m}^T = & [0n_1 0n_2 0n_3], \quad \mu^{el} = A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 d_1^{el} d_2^{el} \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $2d_1^{el}$ и $2d_2^{el}$ – длины элемента в направлениях α_1 и α_2 , \mathbf{v} – столбец перемещений, \mathbf{v}_Γ – столбец перемещений граничного контура элемента Γ^{el} , \mathbf{E} – столбец независимо

введенных деформаций лицевых поверхностей оболочки, ϵ и η – столбцы, характеризующие деформационные соотношения (1.6), (1.7), \mathbf{T} – столбец результирующих напряжений, $\hat{\mathbf{T}}_\Gamma$ – столбец результирующих нагрузок, действующих на границе элемента Γ^{el} , \mathbf{P} – столбец поверхностных нагрузок, \mathbf{D} – несимметричная матрица коэффициентов упругости размера 11×11 , элементы которой определяются на основе соотношений (2.3) с учетом допущений [5, 8, 10, 13], принятых для расчета несжимаемых материалов, а также с целью преодоления пуассоновского заклинивания.

В функционале (4.1) столбцы \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{T} и множитель Лагранжа λ являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений и множителя Лагранжа воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \lambda = \sum_r N_r \lambda_r, \quad r = 1, \dots, 4 \quad (4.2)$$

где $\mathbf{v}_r^T = [v_{1r}^-, v_{1r}^+, v_{2r}^-, v_{2r}^+, v_{3r}^-, v_{3r}^+]$ – столбцы узловых перемещений, $N_r(\xi_1, \xi_2)$ – линейные функции формы, λ_r – значения множителя Лагранжа в узлах элемента.

Для деформаций согласно методу двойной аппроксимации [2, 17], обобщенному на случай учета поперечного обжатия [7, 13], имеем еще более простые формулы

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{00})^T &= [E_{11}^{-00} E_{11}^{+00} E_{22}^{-00} E_{22}^{+00} 2E_{12}^{-00} 2E_{12}^{+00} 2E_{13}^{-00} 2E_{13}^{+00} 2E_{23}^{-00} 2E_{23}^{+00} E_{33}^{00}] \\ (\mathbf{E}^{01})^T &= [E_{11}^{-01} E_{11}^{+01} 2E_{13}^{-01} 2E_{13}^{+01} E_{33}^{01}], \quad (\mathbf{E}^{10})^T = [E_{22}^{-10} E_{22}^{+10} 2E_{23}^{-10} 2E_{23}^{+10} E_{33}^{10}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

где \mathbf{Q}^{00} – единичная матрица размера 11×11 , \mathbf{E}^{00} – столбец, характеризующий однородную форму деформации элемента, \mathbf{E}^{01} , \mathbf{E}^{10} – столбцы, характеризующие неоднородные формы деформации, $\mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{11}]$ – матрица размера 1×1 , введение которой упрощает матричные выкладки. Здесь и далее в этом разделе индексы r_1, r_2 принимают значения 0, 1. Отметим также, что различный характер аппроксимации ком-

понент тензора деформаций Грина–Лагранжа обеспечивает нужное число степеней свободы, что в свою очередь необходимо для корректного представления перемещений элемента как жесткого целого [7, 13].

Для результирующих напряжений примем аппроксимацию, аналогичную (4.3), (4.4),

$$\mathbf{T} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad \mathbf{T}^{11} = [T_{33}^{11}]$$

$$(\mathbf{T}^{00})^T = [T_{11}^{-00} T_{11}^{+00} T_{22}^{-00} T_{22}^{+00} T_{12}^{-00} T_{12}^{+00} T_{13}^{-00} T_{13}^{+00} T_{23}^{-00} T_{23}^{+00} T_{33}^{-00}] \quad (4.5)$$

$$(\mathbf{T}^{01})^T = [T_{11}^{-01} T_{11}^{+01} T_{13}^{-01} T_{13}^{+01} T_{33}^{01}] \quad (\mathbf{T}^{10})^T = [T_{22}^{-10} T_{22}^{+10} T_{23}^{-10} T_{23}^{+10} T_{33}^{10}]$$

Вводя аппроксимации (4.2)–(4.5) в формулу (4.1) и пользуясь стандартной вариационной процедурой смешанной модели метода конечных элементов, приходим к следующим уравнениям равновесия элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T (\mathbf{L}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad \mathbf{T}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [(\mathbf{L}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} + \mathbf{B}^{r_1 r_2} \boldsymbol{\Lambda}] = \mathbf{F} \quad (4.6)$$

где $\mathbf{U}^T = [\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_4^T]$ – столбец узловых перемещений элемента, $\boldsymbol{\Lambda}^T = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4]$ – столбец узловых значений множителя Лагранжа, \mathbf{F} – столбец узловых нагрузок, $\mathbf{B}^{r_1 r_2}$ – матрицы размера 24×4 , отвечающие контактному взаимодействию элемента, $\mathbf{L}^{r_1 r_2}$ – матрицы размера 11×24 , характеризующие линейные составляющие тензора деформаций (1.6), (1.7), $\mathbf{A}^{r_1 r_2}$ – трехмерные массивы размера $11 \times 24 \times 24$, характеризующие нелинейные составляющие тензора деформаций (1.6), (1.7), при этом $\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U}$ – матрицы размера 11×24 , элементы которых вычисляются по формулам

$$(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U})_{pq} = \sum_s A_{pqs}^{r_1 r_2} U_s; \quad p = 1, \dots, 11; \quad q, s = 1, \dots, 24$$

Дополним уравнения (4.6) соотношениями, отвечающими согласно формулам (3.1)–(3.3) за выполнение условий контакта. В зоне контакта ($p \in I_c$, где $I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$) должны удовлетворяться условия

$$g_p^+ - \mathbf{m}_p^T \mathbf{v}_p - \frac{1}{\varepsilon} \lambda_p = 0, \quad \lambda_p \leq 0 \quad (4.7)$$

а вне зоны контакта ($p \notin I_c$) – условия

$$g_p^+ - \mathbf{m}_p^T \mathbf{v}_p \geq 0, \quad \lambda_p = 0 \quad (4.8)$$

где g_r^+ – значения зазора в узлах элемента, $\mathbf{m}_r^T = [0n_{1r} 0n_{2r} 0n_{3r}]$ – столбцы, характеризующие единичные векторы нормали к плоскости штампа в узлах элемента ($r = 1, \dots, 4$).

Введем также столбец зазоров в узлах элемента $\mathbf{G}^T = [g_1^+ g_2^+ g_3^+ g_4^+]$.

К решению уравнений (4.6) с учетом ограничений (4.7), (4.8) применим инкрементальный подход [2, 15], представив искомые функции, узловые нагрузки и зазоры в виде

$$\begin{aligned} {}^{1+\Delta t}\mathbf{E}^{r_1 r_2} &= {}^t\mathbf{E}^{r_1 r_2} + \Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad {}^{1+\Delta t}\mathbf{T}^{r_1 r_2} = {}^t\mathbf{T}^{r_1 r_2} + \Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2} \\ {}^{1+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}, \quad {}^{1+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} \\ {}^{1+\Delta t}\mathbf{\Lambda} &= {}^t\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}, \quad {}^{1+\Delta t}\mathbf{G} = {}^t\mathbf{G} + \Delta\mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Величины, снабженные верхними индексами t и $t + \Delta t$, характеризуют соответственно текущее и конечное напряженно-деформированное состояние оболочки, $\Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2}$, $\Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2}$, $\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\mathbf{F}$, $\Delta\mathbf{\Lambda}$, $\Delta\mathbf{G}$ – инкрементальные переменные.

Вводя далее формулы (4.9) в соотношения (4.6)–(4.8) и учитывая, что в текущем состоянии оболочка находилась в равновесии, получим инкрементальные уравнения равновесия элемента

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2} &= (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T ({}^t\mathbf{M}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{U}) \Delta\mathbf{U}, \\ (\Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2}) &= (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2} \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1 + r_2}} \times \\ &\times [2(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} {}^t\mathbf{T}^{r_1 r_2} + ({}^t\mathbf{M}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2} + \mathbf{B}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{\Lambda}] = \Delta\mathbf{F} \\ {}^t\mathbf{M}^{r_1 r_2} &= \mathbf{L}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} {}^t\mathbf{U} \end{aligned} \quad (4.10)$$

а также инкрементальные условия контакта при $\rho \in {}^{t+\Delta t}I_c$

$$\Delta g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \Delta \mathbf{v}_\rho - \frac{1}{\varepsilon} \Delta \lambda_\rho = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ -{}^t g_\rho^+ + \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.11)$$

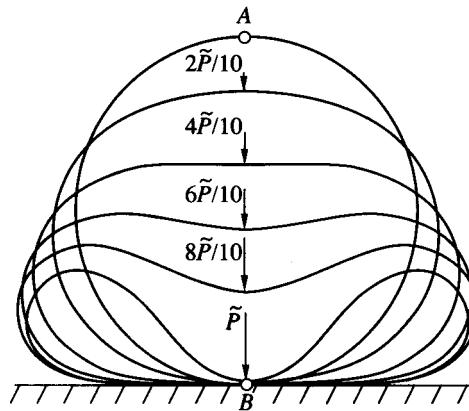
$$\Delta \lambda_\rho \leq \begin{cases} -{}^t \lambda_\rho, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ 0, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.12)$$

и при $\rho \notin {}^{t+\Delta t}I_c$

$$\Delta g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \Delta \mathbf{v}_\rho \geq \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon} {}^t \lambda_\rho, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ -{}^t g_\rho^+ + \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\Delta \lambda_\rho = \begin{cases} -{}^t \lambda_\rho, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ 0, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.14)$$

где ${}^t I_c$, ${}^{t+\Delta t} I_c$ – некоторые подмножества множества $\{1, 2, 3, 4\}$.



Фиг. 2

Исключая в соотношениях (4.10) инкрементальные переменные $\Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2}$ и $\Delta \mathbf{T}^{r_1 r_2}$, приходим к системе нелинейных уравнений относительно инкрементальных переменных $\Delta \mathbf{U}$ и $\Delta \mathbf{\Lambda}$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [2(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} + \quad (4.15)$$

$$+(\mathbf{M}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{U})^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} (\mathbf{M}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{U}) \Delta \mathbf{U} + \mathbf{B}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{\Lambda}] = \Delta \mathbf{F}$$

которую следует решать совместно с инкрементальными контактными условиями (4.11)–(4.14). В формуле (4.15) для удобства записи введены матрицы порядка 11×11

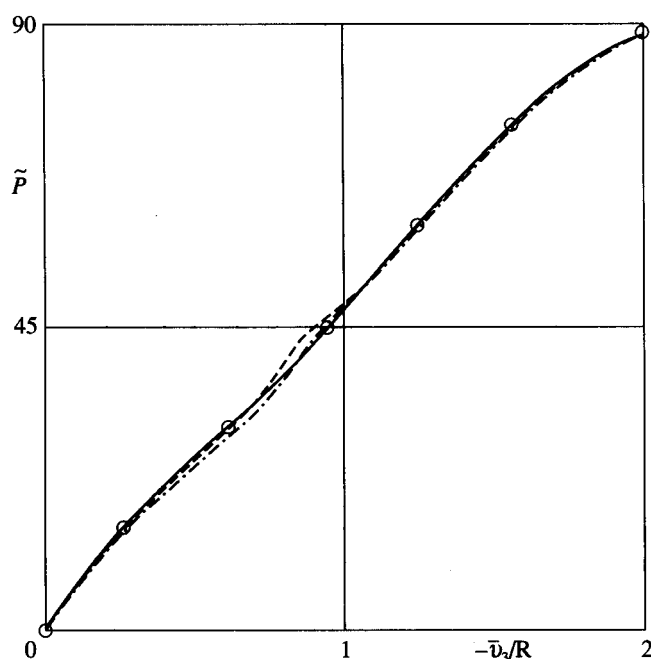
$$\mathbf{D}^{r_1 r_2} = \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T$$

Далее используется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль с получением системы нелинейных уравнений относительно глобального вектора узловых перемещений, на которой здесь останавливаться не будем.

Для решения задачи был использован метод проб и ошибок, суть которого состоит в следующем. Вначале задается начальное приближение зоны контакта и решается методом Ньютона–Рафсона нелинейная система уравнений (4.11), (4.14), (4.15), затем для каждого узла проверяется выполнение неравенств (4.12), (4.13). Если неравенство (4.12) не выполняется, то узел выводится из зоны контакта. В случае, если не выполняется неравенство (4.13), то узел добавляется к зоне контакта.

5. Результаты численных расчетов. Рассмотрим круговую арку, обжимаемую на жесткое основание сосредоточенной силой P , приложенной в верхнем сечении A , как показано на фиг. 2. Механические и геометрические характеристики арки приняты следующими: модуль упругости $E = 10^7$ Н/мм², коэффициент Пуассона $\nu = 0$, радиус срединной окружности $R = 100$ мм, толщина $h = 1$ мм, ширина $b = 1$ мм. Эта задача привлекла внимание (см., например, [18, 19]) с точки зрения изучения проблемы контактного взаимодействия тонкостенных конструкций, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам.

Вследствие симметрии задачи рассмотрена одна половина арки, которая разбивалась на 30 или 60 элементов. Для того чтобы привести нижнюю точку сечения A в “контакт” с верхней точкой сечения B , было использовано 5 шагов по нагрузке. При



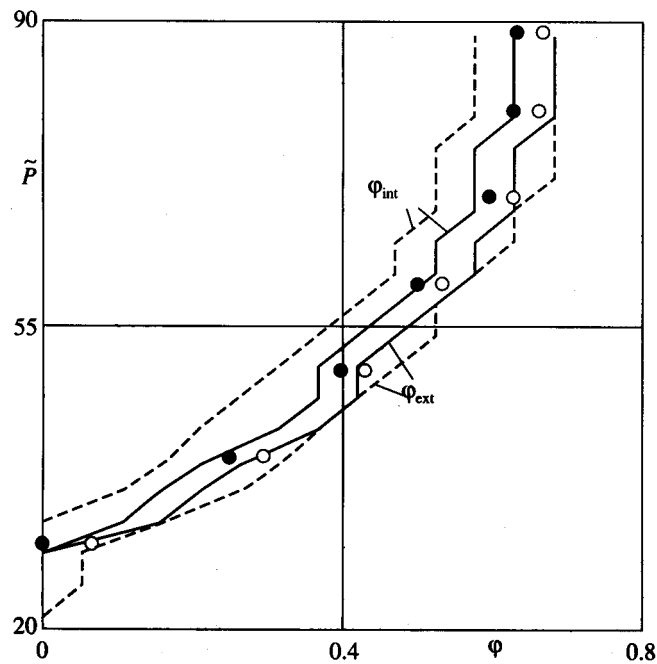
Фиг. 3

этом для сжимающей силы было получено такое значение: $\tilde{P} = 88.40$, где $\tilde{P} = 120PR^2/(Eh^3b)$. Численные эксперименты, однако, показали, что при надлежащем выборе начальной зоны контакта возможно использование меньшего числа инкрементов. На фиг. 3 сплошной кривой представлена зависимость безразмерной силы от безразмерного прогиба срединной точки сечения A . Светлыми точками показаны результаты расчета [19] при использовании инкрементального подхода на основе известной теории осесимметричных оболочек вращения конечного прогиба [20] с численной реализацией смешанным методом конечных элементов. Отметим, что никаких данных о числе использованных шагов по нагрузке в работе [19] не приводилось.

В данной работе при расчетах выбрано два значения регуляризационного параметра: $\epsilon = 10^3$ и $\epsilon = 10^5$. Оказалось, что регуляризационный параметр мало влияет на вид кривой нагрузка–прогиб. Вместе с тем была обнаружена существенная зависимость координат начальной (φ_{int}) и конечной (φ_{ext}) точек контакта от регуляризационного параметра ϵ , поскольку в контакт с основанием вступают лишь несколько узлов. Результаты численных расчетов представлены на фиг. 4 и в табл. 1, где обозначено: φ – центральный угол, отсчитываемый против часовой стрелки от сечения B к сечению A , N^{el} – число элементов, \tilde{Q}_c – безразмерная реакция контактного давления q_c^+

$$\tilde{Q}_c = \frac{120R^2}{Eh^3b} \iint_{S_c^+} q_c^+ dS$$

Сплошные кривые на фиг. 4 соответствуют $\epsilon = 10^5$, штриховые – $\epsilon = 10^3$, светлыми (φ_{ext}) и темными (φ_{int}) точками показаны результаты расчетов Ноора и Кима [19].



Фиг. 4

Заметим, что реакция контактного давления \tilde{Q}_c найдена с высокой точностью, так как для безразмерной силы обжатия \tilde{P} выше было указано достаточно близкое значение.

В качестве второго примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, обжимаемую на жесткое основание сосредоточенной силой P , приложенной в центральном сечении A (фиг. 5). Механические и геометрические характеристики оболочки следующие: $E = 10^7$ Н/мм², $\nu = 0.3$, $R = 100$ мм, $L = 200$ мм, $h = 1$ мм.

Вследствие симметрии задачи рассмотрена одна четверть оболочки, которая разбивалась на 10×60 элементов. Было использовано 5 шагов по нагрузке и принято $\epsilon = 10^3$. Зависимости безразмерной силы $\tilde{P} = 120(1 - \nu^2)PR^2/(Eh^3L)$ от безразмерного прогиба срединных точек сечений A (штрихпунктирная кривая) и B (штриховая кри-

Таблица 1

N^el	ϵ	$-\bar{v}_3^A/R$	\tilde{Q}_c	φ_{int}	φ_{ext}
30	10^3	1.986	88.86	0.628	0.733
60	10^3	1.992	88.51	0.576	0.681
30	10^5	1.983	88.86	0.628	0.733
60	10^5	1.991	88.51	0.628	0.681

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhong Z.H.* Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems. Oxford: Univ. Press, 1993. 371 p.
2. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
3. *Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thick and thin shell structures by curved elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1970. V. 2. № 3. P. 419–451.
4. *Noor A.K.* Bibliography of books and monographs on finite element technology // Appl. Mech. Rev. 1991. V. 44. № 6. P. 307–317.
5. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет попережного обжатия // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 4. С. 435–446.
6. *Kulikov G.M.* Refined global approximation theory of multilayered plates and shells // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. № 2. P. 119–125.
7. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* Simple and effective elements based upon Timoshenko–Mindlin shell theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2002. V. 191. № 11–12. P. 1173–1187.
8. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка // Механика композитных материалов. 2002. Т. 38. № 6. С. 815–826.
9. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Численное решение контактной задачи для многослойных композитных пластин // Вестн. Тамбов. ГТУ. 1998. Т. 4. № 4. С. 526–539.
10. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Контактная задача для многослойной анизотропной оболочки вращения // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 205–223.
11. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 412 с.
12. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
13. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid body motions. Pt I. Timoshenko–Mindlin shell theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2003. V. 192. № 7–8. P. 851–875.
14. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
15. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982 = *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
16. *Bischoff M., Ramm E.* On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37. № 46–47. P. 6933–6960.
17. *Голованов А.И., Корнишин М.С.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: КФТИ АН СССР, 1989. 269 с.
18. *Simo J.C., Wriggers P., Schweizerhoff K.H., Taylor R.L.* Finite deformation postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints // Proc. Intern. Conf. Innovative Methods for Nonlinear Problems. Swansea: Pineridge Press, 1984. P. 365–387.
19. *Noor A.K., Kim K.O.* Mixed finite element formulation for frictionless contact problems // Finite Elements Anal. Design. 1989. V. 4. № 4. P. 315–332.
20. *Reissner E.* On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution // Progress in Applied Mechanics. N.Y.: Macmillan, 1963. P. 171–178.